INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XIX. BAND ERSTES HEFT 1951

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 13.50

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70 u. 32 44 46

Vertriebsvertretung im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Kaufmann, W., Der zeitliche Verlauf des Aufspulvorganges einer instabilen Unstetigkeitsfläche von endlicher Breite 1

Wuest, *W.*, Theorie des Hochdruckmeßrohres mit ausmittiger Bohrung 12

Kucharski, *W.*, Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte. (III. Mitteilung) 22

Rotta, *J.*, Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten 31

Schlichting, *H.* und *N. Scholz*, Über die theoretische Berechnung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters..... 42

Dörr, *Johannes*, Strenge Lösung der Integralgleichung für die Strömung durch ein senkrechtes Flügelgitter 66

Pöschl, *Th.*, Über eine Anwendung der Matrizenrechnung auf die Theorie der Fachwerke 69

Koepcke, *W.*, Nachtrag zum Aufsatz in Bd. VIII, S. 106 74

INGENIEUR-ARCHIV

XIX. BAND ERSTES HEFT 1951

Der zeitliche Verlauf des Aufspulvorganges einer instabilen Unstetigkeitsfläche von endlicher Breite.

Von W. Kaufmann.

1. Einführung. In einer bemerkenswerten Abhandlung hat *H. Kaden* den Aufspulvorgang einer ebenen, instabilen Unstetigkeitsfläche untersucht, die sich einseitig ins Unendliche erstreckt[1]. Die wesentliche Eigenschaft einer solchen ist, daß der Vorgang infolge ähnlicher Vergrößerung nach einem vorgegebenen Zeitgesetz erfolgt, dergestalt, daß sich die Zeiten t und t_1 zu den Maßstäben r und r_1 der ähnlichen Strömungsbilder verhalten wie

$$\frac{t}{t_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{3/2}. \tag{1}$$

Dieses Gesetz gilt jedoch nicht mehr, wenn es sich um Unstetigkeitsflächen von endlicher Breite handelt, wie sie insbesondere hinter Auf- oder Quertrieb erzeugenden Flügeln oder Schaufeln bei Flugzeugen und Strömungsmaschinen auftreten. Es soll deshalb hier der Versuch unternommen werden, etwas über den zeitlichen Verlauf der Aufwickelung einen ebenen Unstetigkeitsfläche von endlicher Breite und vorgegebener, zur Flächenmitte symmetrischer Zirkulationsverteilung auszusagen. Die strömende Flüssigkeit wird dabei durchweg als unzusammendrückbar angesehen.

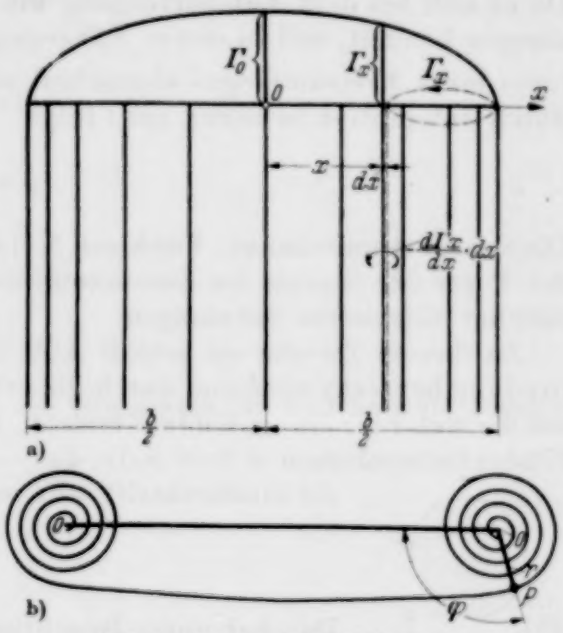


Abb. 1. Schema des Wirbelsystems:
a) im nichtdeformierten Zustand;
b) nach Beginn der Aufwicklung.

Wie aus der Tragflügeltheorie bekannt ist[2], kann man sich eine derartige Unstetigkeitsfläche durch ein System paralleler Wirbelfäden ersetzt denken, die sich, ausgehend von der Hinterkante des Flügels, nach rückwärts bis ins Unendliche erstrecken. Abb. 1a zeigt eine Draufsicht auf das System dieser Wirbelfäden im nicht deformierten Zustand, sowie die Zirkulationsverteilung Γ_x längs der Flügelspannweite b. Der Änderung von Γ_x um $d\Gamma_x$ entspricht der an der Stelle x nach rückwärts abgehende Elementarwirbel mit der Zirkulation $-(d\Gamma_x/dx)\,dx$. Diese Wirbelschicht ist in hohem Maße instabil. Sie wickelt sich von den seitlichen Enden her nach der Mitte zu spiralförmig auf und geht schließlich in zwei Einzelwirbel mit der Zirkulation Γ_0 über. Bezeichnet t_0 die Zeit, die bis zur vollständigen Aufspulung in die beiden Einzelwirbel verstreicht, gerechnet vom Augenblick der Erzeugung der Wirbelschicht, so hat der Querschnitt durch die zur Zeit $t = 0$ nicht aufgewickelte Wirbelschicht zur Zeit $0 < t < t_0$ etwa die aus Abb. 1b ersichtliche Form. Die zu lösende Aufgabe besteht nun darin, zu jeder Zeit t die Form und Größe der beiden Spiralen anzugeben, zu denen sich die Wirbelschicht bereits aufgewickelt hat, während der mittlere Teil — abgesehen von einer Dehnung — im wesentlichen noch unverformt ist[3].

2. Das Zeitgesetz. Als Koordinaten eines beliebigen Punktes P der Spirale zur Zeit t sollen der vom Pol 0 der Spirale nach P gezogene Strahl $\overline{OP} = r$ und der zugehörige Polarwinkel φ

[1] *H. Kaden*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 140.
[2] *A. Betz*, Handbuch der Physik. Bd. VII. S. 241 ff., Berlin 1927.
[3] Vgl. hierzu die von *H. Muttray* hinter einem Rechteckflügel im Windkanal ausgeführten Messungen. Dtsch. Luftfahrt-Forsch., Forschungsbericht Nr. 824/3.

eingeführt werden, letzterer von der Verbindungslinie der beiden Spiralenpole aus gerechnet (Abb. 1b). Man kann also die oben gestellte Frage nach der Form und Größe der beiden Spiralen so beantworten, daß man φ als Funktion der beiden unabhängigen Veränderlichen r und t bestimmt, also

$$\varphi = \varphi(r, t) . \tag{2}$$

Wie aus zahlreichen Strömungsaufnahmen und auch aus systematischen Messungen[1] bekannt ist, liegen die einzelnen Spiralenwindungen — zumindest in der Umgebung der Pole — sehr nahe beieinander und haben angenähert Kreisform. Das Linienintegral der Geschwindigkeit längs eines solchen Kreises vom Radius r, d. h. die Zirkulation Γ_r, ist gleich der Zirkulation Γ_x des Stückes der ursprünglichen (ebenen) Unstetigkeitsfläche von x bis $b/2$ (Abb. 1a), die sich zur Zeit t innerhalb des Kreises vom Halbmesser r aufgewickelt hat[2].

Vernachlässigt man nun mit Rücksicht auf die hier als Idealisierung angenommene (angenäherte) Kreisform eines Spiralenumlaufes alle radialen Geschwindigkeitskomponenten, dann kann sich die Zirkulation Γ_r längs eines Kreises vom Halbmesser r mit der Zeit nicht ändern, d. h. Γ_r ist für ein bestimmtes r unabhängig von t. Als mittlere Umfangsgeschwindigkeit längs der Kreisperipherie sei jetzt der Wert

$$\bar{u} = \frac{\Gamma_r}{2\pi r} \tag{3}$$

definiert. Dann ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitselementes im Abstand r vom Spiralenmittelpunkt

$$\overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}} = \frac{\bar{u}}{r} = \frac{\Gamma_r}{2\pi r^2} . \tag{4}$$

Da es sich bei dem Aufspulvorgang um sehr viele, sehr nahe beieinander liegende Spiralenwindungen handelt, soll in erster Näherung von der Veränderlichkeit der Umfangsgeschwindigkeit längs eines Kreisumfanges abgesehen und somit $\overline{\partial\varphi/dt} = \partial\varphi/dt$ gesetzt werden, so daß aus (4) durch Integration in bezug auf t folgt

$$\varphi = \frac{\Gamma_r t}{2\pi r^2} + f(r) . \tag{5}$$

Die zunächst unbekannte Funktion $f(r)$ hat offenbar bestimmte Bedingungen zu erfüllen, die mit der Form der Spirale im Zusammenhang stehen. Es muß deshalb zunächst versucht werden, darüber Genaueres auszusagen.

Zu diesem Zwecke sei gemäß Abb. 2 die Fläche F betrachtet, welche durch eine Spiralenwindung begrenzt wird und durch die sehr kleine radiale Verbindungsstrecke Δr, d. h. die Länge, um die sich r bei einem Umlauf ändert. Die zeitliche Änderung dF/dt der Fläche F ist gleich dem Flüssigkeitsvolumen $u\Delta r \approx \bar{u}\Delta r$, das — bezogen auf die Tiefe „eins" — in der Zeiteinheit durch Δr hindurchtritt. Es muß also sein[3]

$$u\Delta r = \frac{dF}{dt} . \tag{6}$$

Abb. 2. Durch eine Spiralenwindung begrenzte Fläche F.

Da aber unter Beachtung der oben gemachten Annahmen

$$\frac{\Delta r}{2\pi} = -\frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

gesetzt werden kann, so folgt aus (6) mit Rücksicht auf (3)

$$-\frac{\Gamma_r}{r}\frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{dF}{dt}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\Gamma_r}{r}\frac{1}{dF/dt} . \tag{7}$$

Die zeitliche Änderung dF/dt der Fläche F ist ebenfalls eine Funktion von r und t. Zur Abkürzung soll dafür zunächst

---

[1] *H. Muttray*, a. a. O.
[2] *A. Betz*, Verhalten von Wirbelsystemen. Z. angew. Math. Mech. 12 (1932), S. 164 ff.
[3] *H. Kaden*, a. a. O.

$$\frac{dF}{dt} = \psi = \psi(r, t) \tag{8}$$

gesetzt werden, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\Gamma_r}{r\psi}.$$

Differentiiert man diesen Ausdruck partiell nach t, so wird

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial r} = \frac{\Gamma_r}{r\psi^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{9}$$

Weiter folgt aus (4) mit $\partial\varphi/\partial t = \partial\varphi/dt$ durch partielle Differentiation nach r

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial t} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_r}{r^2}\right). \tag{10}$$

Nach den Regeln der Differentialrechnung müssen die Ausdrücke (9) und (10) einander gleich sein, also

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_r}{r^2}\right) = \frac{\Gamma_r}{r\psi^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{11}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_r}{r^2}\right) = \frac{\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r} r^2 - 2\,\Gamma_r r}{r^4}. \tag{11a}$$

womit (11) übergeht in

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r}\frac{1}{r\Gamma_r} - \frac{2}{r^2}\right) = \frac{1}{\psi^2}\frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r}\frac{1}{r\Gamma_r} - \frac{2}{r^2}\right) = g(r), \tag{12}$$

so wird

$$g(r)\,\partial t = \frac{\partial \psi}{\psi^2},$$

und durch Integration folgt daraus

$$t = -\frac{1}{\psi\, g(r)} + \tau(r),$$

wo $\tau(r)$ eine noch unbekannte Funktion von r ist, welche die Dimension der Zeit besitzt. Nach ψ aufgelöst, erhält man daraus wegen (8)

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{1}{g(r)[t - \tau(r)]}. \tag{13}$$

Mit diesem Ausdruck liefert (7)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\Gamma_r}{r}\, g(r)\,[t - \tau(r)]. \tag{14}$$

Einen zweiten Ausdruck $\partial\varphi/\partial r$ erhält man aus (5) durch partielle Differentiation nach r, nämlich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{t}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_r}{r^2}\right) + f'(r). \tag{14a}$$

Setzt man beide Ausdrücke einander gleich, so wird

$$\frac{\Gamma_r}{r}\, g(r)\,[t - \tau(r)] = \frac{t}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_r}{r^2}\right) + f'(r). \tag{15}$$

Da aber unter Beachtung von (11a) und (12)

$$\frac{\Gamma_r t}{r}\, g(r) = \frac{t}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Gamma_r}{r^2}\right)$$

ist, so folgt aus (15)

$$f'(r) = -\frac{\Gamma_r}{r}\, g(r)\, \tau(r) \tag{16}$$

als alleinige Funktion von r. Integriert man diesen Ausdruck nach r, so erhält man wegen (12)

$$f(r) = \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\Gamma_r}{r^3} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r}\right)\tau(r)\,dr + C$$

und damit aus (5)

$$\dot{\varphi} = \frac{\Gamma_r t}{2\pi r^2} + \frac{1}{\pi}\int\left(\frac{\Gamma_r}{r^3} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r}\right)\tau(r)\,dr + C\,. \tag{17}$$

Die Zirkulationsverteilung $\Gamma_r = \Gamma_r(r)$ innerhalb der Spirale kann berechnet werden, sobald die Zirkulationsverteilung Γ_x über die Flügelspannweite b gegeben ist[1]. Mit sehr guter Annäherung kann man dafür setzen

$$\Gamma_r = \Gamma_0\left[1 - \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)^{\nu}\right]^{1/\nu}, \tag{18}$$

wobei r_0 den Halbmesser der Einzelwirbel bezeichnet, zu denen sich die Unstetigkeitsfläche nach Ablauf der Zeit t_0 aufgewickelt hat (Abb. 3), und Γ_0 die maximale Flügelzirkulation. Der Exponent ν und sein reziproker Wert $1/\nu$ hängen von dem Verhältnis $\sigma = 2a/b$ ab, in dem

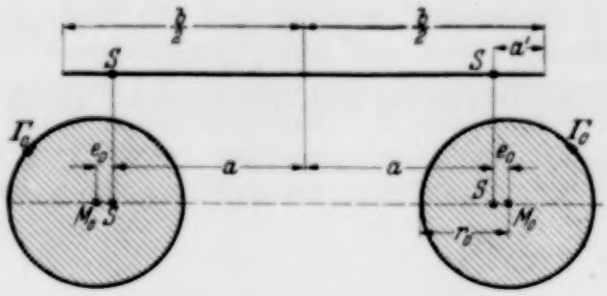


Abb. 3. Wirbelkerne nach Beendigung des Aufspulvorganges.

$$a = \frac{1}{\Gamma_0}\int_{x=0}^{x=b/2}\Gamma_x\,dx \tag{19}$$

den halben Schwerpunktsabstand der beiden Einzelwirbel vom Halbmesser r_0 darstellt. Die Größe ν kann aus folgender Tabelle entnommen werden[2]:

ν =	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75
σ =	0,5	0,6119	0,6888	0,7472	$\pi/4$	0,8245	0,8507	0,8716

ν =	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
σ =	0,8896	0,9166	0,9318	0,9474	0,9548

Das Integral (17) enthält aber noch die zunächst unbekannte Funktion $\tau(r)$, durch welche erst die zeitliche Änderung der Spiralenfläche gemäß (13) bestimmt ist. Es darf wohl vermutet werden, daß dieser Ausdruck einem der Minimalprinzipe der allgemeinen Mechanik gehorchen muß, indessen kann darüber zur Zeit noch nichts Bestimmtes ausgesagt werden. Nachstehend soll deshalb versucht werden, einen plausiblen Ansatz für $\tau(r)$ zu finden, der einerseits dimensionsrichtig ist und andererseits die zur Verfügung stehenden Randbedingungen befriedigt.

Zunächst soll als „Wirbelkern" derjenige Bereich von Abb. 1b definiert werden, der durch den Winkel $\varphi = \pi/2$ begrenzt ist. Setzt man diesen Winkel in (17) ein, so kann daraus $r = r(t)$ als Kernhalbmesser zur Zeit t berechnet werden, sobald die Integration ausgeführt ist. Zur Erreichung dieses Zieles sei zunächst ein Zustand betrachtet, in dem der Aufspulvorgang bereits begonnen hat, r aber noch einen beliebig kleinen Wert besitzt. In diesem Zustand kann man sich die Unstetigkeitsfläche mit großer Annäherung einseitig ins Unendliche erstreckt denken und die Ergebnisse der *Kaden*schen Theorie[3] zum Vergleich heranziehen. Nach dieser gilt für kleine r

$$\frac{dF}{dt} = \frac{4}{3}\pi\frac{r^2}{t} \tag{20}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{3}{2}\frac{\varkappa t}{\pi r^{5/2}}, \tag{21}$$

wo

$$\varkappa = \frac{\Gamma_r}{2r^{1/2}}. \tag{21a}$$

Legt man zunächst, um zu konkreten Vorstellungen zu gelangen, eine alliptische Zirkulations-

[1] *W. Kaufmann*, S.-B. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. 1946, S. 109. und Ing.-Arch. 17 (1949). S. 191.
[2] *W. Kaufmann*, a. a. O.
[3] *H. Kaden*, a. a. O.

verteilung über die Flügelspannweite zugrunde, so folgt aus (19) als halber Schwerpunktsabstand der Einzelwirbel $a = b\pi/8$, weshalb $\sigma = 2a/b = \pi/4$. Für diesen Wert liefert die obige Tabelle den Exponenten $\nu = 2$ in (18), weshalb

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \sqrt{2\,\frac{r}{r_0} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}\,, \tag{22}$$

d. h. im Kern ist die Zirkulation elliptisch über r verteilt. Läßt man nun $r \to 0$ gehen, so wird

$$[\Gamma_r]_{r\to 0} = \Gamma_0 \sqrt{2\,\frac{r}{r_0}}\,. \tag{22a}$$

weiter wegen (12)

$$g(r)_{r\to 0} = -\frac{3}{4\pi r^2} \tag{23}$$

und wegen (13)

$$\left[\frac{dF}{dt}\right]_{r\to 0} = \frac{4\pi r^2}{3[t-\tau(r)]}\,. \tag{24}$$

Damit dieser Wert für sehr kleine r mit (20) übereinstimmt, muß $\tau(r)$ mit r schneller gegen Null gehen als t. Für die sich einseitig ins Unendliche erstreckende Unstetigkeitsfläche wird nach (1)

$$t = r^{3/2} \cdot \text{konst.} \tag{24a}$$

Die gesuchte Funktion $\tau(r)$ muß also mit r^n gegen Null gehen, wo $n > 3/2$ ist (erste Bedingung für $\tau(r)$).

Aus Gleichung (14a) folgt unter Beachtung von (22a)

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r\to 0} = \frac{t\,\Gamma_0 \sqrt{\frac{2}{r_0}}}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial r}\,(r^{-3/2}) + f'(r) = -\frac{3}{2}\,\frac{t\,\Gamma_0}{\pi\sqrt{2\,r_0}\,r^{5/2}} + f'(r)\,.$$

Durch die Verbindung von (21a) und (22a) findet man

$$\varkappa = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{2\,r_0}}\,,$$

so daß

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r\to 0} = -\frac{3}{2}\,\frac{\varkappa t}{\pi r^{5/2}} + f'(r)\,.$$

Damit dieser Wert für sehr kleine r mit (21) übereinstimmt, muß

$$f'(r)_{r\to 0} = 0$$

sein.

Nun folgt aus (16) wegen (22a) und (23)

$$f'(r)_{r\to 0} = \frac{3}{4}\,\frac{\Gamma_0\sqrt{2}}{\pi\sqrt{r_0}\,r^{5/2}}\,\tau(r)\,.$$

Soll also $f'(r)_{r\to 0} = 0$ werden, so muß $\tau(r)$ mit r^n gegen Null gehen, wobei $n' > 5/2$ ist (zweite Bedingung für $\tau(r)$). Nach Ablauf der Zeit $t = t_0$ ist der Aufspulvorgang beendet; der Wirbelkern hat dann den größten Halbmesser r_0 erreicht, und die gesamte Zirkulation Γ_0 ist jetzt innerhalb des Kernes enthalten (Abb. 3). In diesem Augenblick muß also

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_{r=r_0} = 0$$

sein (dritte Bedingung für $\tau(r)$).

Aus Gleichung (13) folgt, daß $\tau(r)$ die Dimension der Zeit haben muß, aber eine reine Funktion vor r sein soll. Die Zeit kann also nur als Konstante darin enthalten sein — etwa t_0 — während r dimensionslos in $\tau(r)$ eingeht (vierte Bedingung für $\tau(r)$).

Die vorstehenden vier Bedingungen seien jetzt in folgendem Ansatz vereinigt:

$$\tau(r) = \frac{c t_0\,(r/r_0)^{7/2}}{\sqrt{1-(r/r_0)^2}}\,, \tag{25}$$

wo c eine zunächst unbekannte Zahl bezeichnet. Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck die oben gestellten Forderungen erfüllt.

Setzt man nun (25) in Gleichung (17) ein, so wird

$$\varphi = \frac{\Gamma_r t}{2\pi r^2} + \frac{c t_0}{\pi}\int\left(\frac{\Gamma_r}{r^3} - \frac{1}{2r^2}\frac{\partial \Gamma_r}{\partial r}\right)\frac{(r/r_0)^{7/2}}{\sqrt{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2}}\,dr + C. \tag{26}$$

Die weitere Rechnung soll auch hier für den Fall elliptischer Zirkulationsverteilung durchgeführt werden, obwohl dies grundsätzlich auch für jede andere Γ_r-Verteilung möglich wäre. Zunächst wird das in (26) auftretende Integral behandelt. Unter Beachtung von (22) erhält man dafür nach Einführung des dimensionslosen Wertes

$$\bar{r} = \frac{r}{r_0} \tag{27}$$

das Integral

$$J = \int\left(\frac{\Gamma_0\sqrt{2\bar{r}-\bar{r}^2}}{\bar{r}^2 r_0^2} - \frac{\Gamma_0}{2r^2 r_0^2}\frac{1-\bar{r}}{\sqrt{2\bar{r}-\bar{r}^2}}\right)\frac{\bar{r}^{7/2}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}}\,r_0 d\bar{r} = \frac{\Gamma_0}{2r_0^2}\int\frac{3-\bar{r}}{\sqrt{2-\bar{r}}}\frac{\bar{r}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}}\,dr$$

$$= \frac{\Gamma_0}{2r_0^2}\int(3-\bar{r})\sqrt{\frac{\bar{r}}{2-\bar{r}}}\sqrt{\frac{\bar{r}}{1-\bar{r}^2}}\,d\bar{r}.$$

Der Ausdruck $(3-\bar{r})\sqrt{\frac{\bar{r}}{2-\bar{r}}}$ kann mit sehr guter Näherung durch die Parabel $2\sqrt{\bar{r}}$ ersetzt werden, so daß man erhält

$$J = \frac{\Gamma_0}{r_0^2}\int\frac{\bar{r}}{\sqrt{1-\bar{r}^2}}\,dr = \frac{\Gamma_0}{2r_0^2}\int\frac{d(\bar{r}^2)}{\sqrt{1-\bar{r}^2}} = -\frac{\Gamma_0}{r_0^2}\sqrt{1-\bar{r}^2}.$$

Mit diesem Wert des Integrals liefert (26) schließlich

$$\varphi = \frac{\Gamma_r t}{2\pi\bar{r}^2 r_0^2} - \frac{\Gamma_0 t_0 c}{\pi r_0^2}\sqrt{1-\bar{r}^2} + C. \tag{28}$$

Setzt man nun für den Kernrand $\varphi = \pi/2$ (s. oben), so kann r als Funktion von t angegeben werden, sobald die drei noch offenen Konstanten c, C und t_0 bestimmt sind.

Für sehr kleine Werte von r gilt das Zeitgesetz (24a), worin die Konstante zunächst allerdings nicht bekannt ist. Aus dieser Gleichung folgt $t = 0$ für $r = 0$ und $(dt/dr)_{r\to 0} = 0$. Diese Bedingungen sollen auch hier gefordert werden. Weiter muß für $r = r_0$, d. h. bei Beendigung des Aufspulvorganges, $t = t_0$ und $(dr/dt)_{r=r_0} = 0$, bzw. $(dt/dr)_{r=r_0} = \infty$ werden. Diese vier Bedingungen werden — wovon man sich leicht überzeugt — durch den Ansatz

$$t = t_0\left|1-\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/2}\right]^{2/3}\right| \tag{29}$$

befriedigt. Entwickelt man ihn in eine binomische Reihe, so wird

$$t = t_0\left|\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/2} + \frac{1}{9}\left(\frac{r}{r_0}\right)^3 + \cdots\right|,$$

woraus für kleine r folgt

$$(t)_{r\to 0} = \frac{2}{3}t_0\left(\frac{r}{r_0}\right)^{3/2}. \tag{30}$$

Der obige Ausdruck (29) soll nur zur Bestimmung der Konstanten in Gleichung (24a) dienen, die lediglich für kleine r gilt. Das wirkliche Zeitgesetz wird dagegen erst aus Gleichung (28) abgeleitet.

Man erhält also aus (28) mit $\varphi = \pi/2$ für kleine r wegen (22a)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2/3\sqrt{2}\,\Gamma_0 t_0}{2\pi r_0^2} - \frac{\Gamma_0 t_0 c}{\pi r_0^2} + C. \tag{31}$$

Für $r = r_0$ ist $t = t_0$ und $\Gamma_r = \Gamma_0$. Setzt man diese Größen in (28) ein, so wird

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma_0 t_0}{2\pi r_0^2} + C \tag{32}$$

oder

$$C = \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma_0 t_0}{2\pi r_0^2}.$$

Schließlich liefert die Verbindung von (31) und (32) sofort

$$c = \frac{1}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{2} = -0{,}029\,.$$

Mit $\varphi = \pi/2$ und den Konstanten c und C folgt dann aus (28), wenn noch die dimensionslose Größe

$$\frac{t}{t_0} = \bar{t} \tag{33}$$

eingeführt wird, unter Beachtung von (22)

$$0 = \frac{\bar{t}}{\bar{r}^2}\sqrt{2\bar{r} - \bar{r}^2} + 0{,}058\sqrt{1 - \bar{r}^2} - 1$$

oder

$$\bar{t} = \left(1 - 0{,}058\sqrt{1 - \bar{r}^2}\right)\frac{\bar{r}^2}{\sqrt{2\bar{r} - \bar{r}^2}}\,. \tag{34}$$

Wie man sieht, wird

$$(\bar{t})_{\bar{r}\to 0} = (1 - 0{,}058)\frac{\bar{r}^2}{\sqrt{2\bar{r}}} = \frac{2}{3}\bar{r}^{3/2},$$

entsprechend der Bedingung (30), und $\bar{t} = 1$ für $\bar{r} = 1$. Differenziert man in (34) $\bar{t}$ nach $\bar{r}$, so stellt man fest, daß in der Tat $(dt/dr)_{r\to 0} = 0$ und $(dt/dr)_{r=r_0} = \infty$ wird, wie oben gefordert wurde.

Der größte Kernhalbmesser kann berechnet werden, wenn der halbe Schwerpunktsabstand a der beiden Einzelwirbel vom Halbmesser r_0 aus (19) bestimmt ist. Man erhält dafür [1]

$$r_0 = a\sqrt[4]{3/4}\,. \tag{35}$$

In dem Zeitgesetz (34) ist somit nur noch die Aufspulzeit t_0 unbekannt. Bevor an deren Ermittlung herangegangen wird, soll zunächst als Kontrolle der Gleichung (25) noch ein anderer Ansatz für die Funktion $\tau(r)$ gemacht werden, nämlich

$$\tau(r) = \frac{c\,t_0\,\bar{r}^3}{\sqrt{1 - r}}\,, \tag{36}$$

der ebenfalls die oben für $\tau(r)$ aufgestellten Bedingungen befriedigt. Führt man in Gleichung (17) wieder die Zirkulation Γ_r aus (22) ein und beachtet die Abkürzung (27), dann lautet jetzt das in (17) auftretende Integral

$$J = \frac{c\,t_0}{\pi}\int\left(\frac{\Gamma_0\sqrt{2\bar{r} - \bar{r}^2}}{\bar{r}^3 r_0^4} - \frac{\Gamma_0}{2\bar{r}^2 r_0^3}\,\frac{1 - \bar{r}}{\sqrt{2\bar{r} - \bar{r}^2}}\right)\frac{\bar{r}^3}{\sqrt{1 - \bar{r}}}\,r_0\,d\,r$$

$$= \frac{\Gamma_0 t_0 c}{2\pi r_0^2}\int\frac{3\bar{r} - \bar{r}^2}{\sqrt{2\bar{r} - \bar{r}^2}}\,\frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}}} = \frac{\Gamma_0 t_0 c}{2\pi r_0^2}\int(3 - \bar{r})\sqrt{\frac{\bar{r}}{2 - \bar{r}}}\,\frac{d\bar{r}}{\sqrt{1 - \bar{r}}}\,.$$

Setzt man wieder wie oben

$$(3 - \bar{r})\sqrt{\frac{\bar{r}}{2 - \bar{r}}} \approx 2\sqrt{\bar{r}}\,,$$

so wird

$$J = \frac{\Gamma_0 t_0 c}{\pi r_0^2}\int\frac{\bar{r}}{\sqrt{\bar{r} - \bar{r}^2}}\,d\bar{r} = -\frac{\Gamma_0 t_0 c}{\pi r_0^2}\left[\sqrt{\bar{r} - \bar{r}^2} + \frac{1}{2}\arcsin(1 - 2\bar{r})\right],$$

womit Gleichung (17) lautet

$$\varphi = \frac{\Gamma_r t}{2\pi\bar{r}^2 r_0^2} - \frac{\Gamma_0 t_0 c}{2\pi r_0^2}\left[2\sqrt{\bar{r} - \bar{r}^2} + \arcsin(1 - 2\bar{r})\right] + C\,. \tag{37}$$

Zur Bestimmung der Konstanten c und C dienen die gleichen Bedingungen wie oben. Für kleine r gilt Gleichung (30), außerdem ist $t = t_0$ für $r = r_0$ und $\Gamma_r = \Gamma_0$. Mit $\varphi = \pi/2$ folgt dann aus (37) unter Beachtung von (22a) für kleine r

[1] *W. Kaufmann*, a. a. O.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma_0 t_0 \, 2/3 \sqrt{2}}{2\pi r_0^2} - \frac{\Gamma_0 t_0 c}{2\pi r_0^2} \frac{\pi}{2} + C$$

und für $r = r_0$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\Gamma_0 t_0}{2\pi r_0^2} + \frac{\Gamma_0 t_0 c}{2\pi r_0^2} \frac{\pi}{2} + C .$$

Durch Verbindung beider Gleichungen erhält man

$$c = \frac{2/3\sqrt{2} - 1}{\pi} = -0{,}0182 ,$$

$$C = \frac{\pi}{2} - 0{,}971 \frac{\Gamma_0 t_0}{2\pi r_0^2} .$$

Damit folgt aus (37) mit $\varphi = \pi/2$

$$0 = \frac{\Gamma_r \bar{t}}{\Gamma_0 \bar{r}^2} + 0{,}0182 \left[2 \sqrt{\bar{r} - \bar{r}^2} + \arcsin (1 - 2\bar{r}) \right] - 0{,}971$$

oder unter Beachtung von (22)

$$\bar{t} = \frac{\bar{r}^2}{\sqrt{2\bar{r} - \bar{r}^2}} \left(0{,}971 - 0{,}0182 \left[2 \sqrt{\bar{r} - \bar{r}^2} + \arcsin (1 - 2\bar{r}) \right] \right) . \tag{38}$$

Nachstehend sind die Werte $\bar{t}$, die sich aus (34) und (38) ergeben, miteinander verglichen. Man erkennt daraus, daß praktisch vollkommene Übereinstimmung besteht (Rechenschieberablesung). Damit liegt das Zeitgesetz $t = t(r)$ fest, sobald r_0 nach (35) berechnet und die Aufspulzeit t_0 bekannt ist.

$\bar{r} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
$\bar{t} =$	0	0,022	0,063	0,119	0,189	0,275	0,375	0,493	0,630	0,796	1,0	(34)
$\bar{t} =$	0	0,022	0,063	0,119	0,190	0,275	0,376	0,495	0,630	0,796	1,0	(38)

3. Die Aufspulzeit t_0. Die in Ziff. 2 durchgeführten Untersuchungen sind rein kinematischer Art und dienen lediglich zur Bestimmung der Form des Spiralenkerns; über die Größe der Aufspulzeit vermögen sie jedoch nichts auszusagen. Letztere hängt offenbar von den Kräften ab, die zur Aufwicklung der ursprünglich ebenen Unstetigkeitsfläche führen. Die ins Einzelne gehende Untersuchung dieses Vorganges ist recht schwierig und bisher nur für das erste Stadium gelungen[1]. Es kann deshalb hier lediglich eine mehr summarische Betrachtung darüber angestellt werden, vorbehaltlich einer späteren Nachprüfung durch den Versuch.

Im ganzen gesehen sind die Kräfte, die beim Aufspulvorgang eine Rolle spielen, der Auf- oder Quertrieb

$$A = \varrho v_\infty \int_{(b)} \Gamma_x \, dx$$

und der induzierte Widerstand

$$W_i = \frac{\varrho}{4\pi} \int_{(b)} \Gamma_\xi \, d\xi \int_{(b)} \frac{d\Gamma_x}{dx} \frac{dx}{\xi - x} ,$$

die gemäß vorstehenden Gleichungen von der speziellen Form der Zirkulationsverteilung über die Spannweite b (Breite der ursprünglichen Unstetigkeitsfläche) abhängen. Für den Fall, daß $d\Gamma_x/dx = 0$ für alle x ist (ebenes Problem), gibt es keine Wirbelschicht (vgl. Ziff. 1) und auch keinen induzierten Widerstand. Bekanntlich können A und W_i auch wie folgt geschrieben werden:

$$A = c_a q F , \qquad W_i = c_{wi} q F ,$$

wo c_a die Auftriebs- und c_{wi} die induzierte Widerstandsziffer bezeichnen, während $q = (\varrho/2) v_\infty^2$ den Staudruck und F die „Flügelfläche" darstellen. Im Falle elliptischer Zirkulationsverteilung Γ_x ist $c_{wi} = \frac{c_a^2}{\pi} \frac{F}{b^2}$. Bildet man nun den Quotienten

$$\frac{A}{W_i} = \frac{c_a}{c_{w_i}} = \frac{\pi}{c_a} \frac{b^2}{F} , \tag{39}$$

[1] *H. Kaden*, a. a. O.

so erkennt man, daß dieser Quotient bei gegebener Flügelstreckung b^2/F mit kleiner werdendem c_a immer größer wird und schließlich mit $c_a \to 0$ gegen unendlich geht. Bei nicht elliptischer, sich mehr dem Rechteck nähernder Γ_x-Verteilung ist

$$c_{w_i} = \psi \frac{c_a^2}{\pi} \frac{F}{b^2},$$

wo $\psi > 1$ [1], weshalb

$$\frac{A}{W_i} = \frac{\pi}{\psi c_a} \frac{b^2}{F}. \tag{39a}$$

Der Faktor ψ wird um so größer je größer die Flügelstreckung ist. Außer diesen beiden Kräften spielen für den Aufspulvorgang zwei charakteristische Längen eine Rolle: Der Abstand l_0, welcher das Ende der Aufwickelung, gerechnet von der Flügelhinterkante aus, bestimmt und der Abstand $a' = \frac{1}{2} b - a$ des Schwerpunktes S der beiden Einzelwirbel von den Flügelenden am Ende der Aufspulzeit t_0 (Abb. 3). Über die Länge l_0 ist zur Zeit nichts Genaueres bekannt. An einem elliptischen Flügel von der Streckung $b^2/F = 5$ hat *Muttray* [2] die Lage der Randwirbelkerne für $c_a = 1{,}07$ ausgemessen und kommt zu dem Schluß, daß der Aufrollvorgang vermutlich bei einer Länge $l_0 = b$ beendet ist. Auch aus Luftaufnahmen [3] sind die beiden aufgewickelten Einzelwirbel bereits in kurzer Entfernung hinter dem Flügel erkennbar. Bei gegebener Zirkulationsverteilung Γ_x ist a' eine ganz bestimmte Länge, die nur von der Form dieser Verteilung, nicht aber vor der absoluten Größe von Γ_x abhängt. So ist z. B. bei elliptischer Γ_x-Verteilung wegen (19) $a = b\pi/8$ und somit $a' = \frac{1}{2} b(1 - \pi/4)$. Entsprechende Werte können für andere Γ_x-Verteilungen angegeben werden. Das Verhältnis l_0/a' wird sich also bei einer bestimmten Flügelform nur in dem Maße ändern können, in dem sich c_a ändert. Geht c_a gegen Null, dann muß $l_0 \to \infty$ gehen. Denkt man sich als andern Grenzfall einen „Hufeisenwirbel", so ist $a' = 0$ und $l_0 = 0$, denn in diesem Falle gehen die beiden „Randwirbel" direkt von den Flügelenden nach rückwärts als Fortsetzung des „tragenden Wirbels", der den Auftrieb erzeugt. Setzt man nun die beiden Verhältniswerte A/W_i und l_0/a' einander proportional, so erhält man wegen (39a)

$$l_0 = a' \frac{\pi}{\psi c_a} \frac{b^2}{F} \varkappa \tag{40}$$

und erfüllt damit jedenfalls die beiden Grenzbedingungen $l_0 = 0$ für $a' = 0$ (Hufeisenwirbel) und $l_0 = \infty$ für $c_a = 0$ bei vorgegebener Γ_x — Verteilung. Da aber

$$l_0 = t_0 v_\infty$$

ist, wo v_∞ die als gleichförmig angenommene Fortschrittsgeschwindigkeit des Flügels bezeichnet, so ergibt sich aus (40) mit $a' = \frac{1}{2} b - a$ als Aufspulzeit

$$t_0 = \frac{b/2 - a}{v_\infty} \frac{\pi}{\psi c_a} \frac{b^2}{F} \varkappa. \tag{41}$$

Dieser lineare Ansatz hat zunächst nur hypothetische Bedeutung und bedarf hinsichtlich seiner Brauchbarkeit einer systematischen Nachprüfung durch das Experiment. Insbesondere kann über die Konstante $\varkappa$ zunächst keine Angabe gemacht werden.

4. Vergleich der vorstehenden Theorie mit Versuchsergebnissen. Eine Prüfung der Theorie an Hand von Versuchen bereitet insofern Schwierigkeiten als bisher weder die Aufspullänge l_0 noch die Größe der Wirbelkerne zu einer beliebigen Zeit $0 < t \leq t_0$ genau gemessen werden konnten, da sich solchen Messungen erfahrungsgemäß erhebliche Schwierigkeiten entgegenstellen. Eine Vergleichsmöglichkeit bieten jedoch die sehr sorgfältigen Druckmessungen, die *Muttray* [4] an einem rechteckigen Flügel mit der Flügelstreckung $b^2/F = 5{,}36$, der Auftriebsziffer $c_a = 0{,}505$, der Flügelfläche $F = 0{,}1439\ [m^2]$ und der Halbspannweite $b/2 = 0{,}439\ [m]$ bei der Anströmungsgeschwindigkeit $v_\infty = 32{,}9\ [m/sec]$ durchgeführt hat. An diesen Untersuchungen interessiert für das vorliegende Problem besonders die Lage der Kernschwerpunkte in verschiedenen Abständen hinter dem Flügel. Faßt man — wie oben geschehen — die Kernränder zu einer belie-

[1] Vgl. hierzu: *J. Hueber*, Z. Flugtechn. Motorluftschiff. 1933, S. 249—251 und 269—272.
[2] *H. Muttray*, Luftfahrt-Forsch. 1935, S. 28—37.
[3] *H. Lueder*, Jb. 1942 dtsch. Luftfahrtforsch. S I 103/105.
[4] *H. Muttray*, Dtsch. Luftfahrtforsch., Forschungsbericht Nr. 824/3.

bigen Zeit angenähert als Kreise auf (Ziff. 2), so fallen die Schwerpunkte S_1 dieser Kerne nicht mit den Mittelpunkten M der Kernränder zusammen, sondern liegen um eine gewisse Strecke e exzentrisch zu diesen (Abb. 4).[1] Bezeichnet nun x_1 den Abstand des Kernschwerpunktes S_1 von der Symmetrieachse und x die Abszisse der Zirkulation $\Gamma_x = \Gamma_r$, die sich im Kreise vom Halbmesser r zur Zeit t bereits aufgespult hat (vgl. auch Abb. 1a), so gilt für x_1 mit der Abkürzung

$$(x_1 - x)^2 = f(x) \tag{42}$$

folgende Beziehung [1]

$$2r^2 = f(x) - a^2 + a\sqrt{a^2 + 2f(x)}\,.$$

Die Auflösung dieser in $f(x)$ quadratischen Gleichung liefert

$$f(x) = 2(a^2 + r^2) \mp 2\sqrt{(a^2 + r^2)^2 - r^2(a^2 + r^2)}\,, \tag{43}$$

so daß wegen (42)

$$x_1 = x + \sqrt{f(x)} \tag{43a}$$

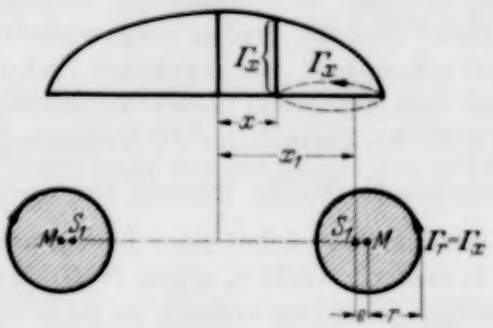


Abb. 4. Wirbelkerne zur Zeit $t < t_0$.

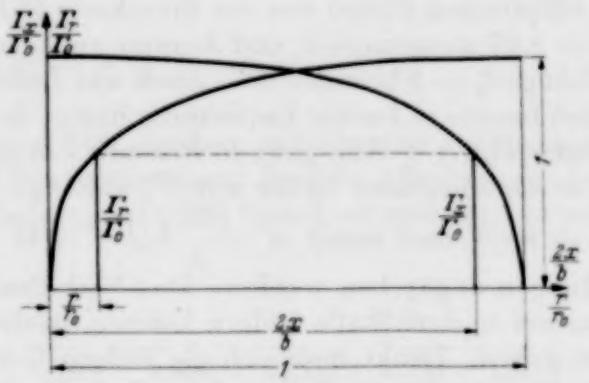


Abb. 5. Verlauf der Flügel- und Kernzirkulation.

für jedes beliebige r berechnet werden kann, wenn $\Gamma_x(x)$ gegeben ist. Nachstehend soll diese Rechnung am Beispiel des *Muttray*schen Versuchsflügels erläutert werden.

Zunächst werden die Flügelzirkulation Γ_x und die Kernzirkulation Γ_r durch folgende Ansätze dargestellt[2] [vgl. auch (18)]:

$$\Gamma_x = \Gamma_0 \left[1 - \left(\frac{2x}{b}\right)^\nu\right]^{1/\nu} \tag{44}$$

und

$$\Gamma_r = \Gamma_0 \left[1 - \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^\nu\right]^{1/\nu}. \tag{45}$$

Die Größe $\sigma = 2a/b$ (Ziff. 2) kann einer Arbeit von *Hueber*[3] entnommen werden, welcher die Zirkulationsverteilungen für eine Reihe von doppeltrapezförmigen Flügeln bei verschiedenen Flügelstreckungen berechnet hat. Danach ergibt sich für einen Rechteckflügel vom Seitenverhältnis 1:5 der Wert $\sigma = 0{,}864$, dem nach der Zahlentafel auf S. 4 der Exponent $\nu = 2{,}66$ entspricht. Da das Seitenverhältnis des *Muttray*schen Flügels nahezu das gleiche ist (1:5,36), soll hier mit dem vorstehenden Wert von ν gerechnet werden. Der damit entstehende Verlauf der Funktionen Γ_x/Γ_0 und Γ_r/Γ_0 ist aus Abb. 5 ersichtlich.

Aus Gleichung (40) folgt nun als Aufspullänge mit den oben angegebenen Zahlenwerten und $\varphi = 1{,}04$ [3]

$$l_0 = \frac{b}{2}(1 - 0{,}864)\,\frac{\pi \cdot 5{,}36}{1{,}04 \cdot 0{,}505}\,\varkappa = 2{,}18\,\varkappa b \tag{46}$$

oder

$$\frac{l_0}{b} = 2{,}18\,\varkappa$$

Beachtet man, daß *Muttray* (s. oben) für eine Auftriebsziffer $c_a = 1{,}07$ bei einem elliptischen Flügel von der Streckung $b^2/F = 5$ die Zahl $l_0/b = 1$ angibt, so darf wohl aus Gleichung (46), welche

[1] *W. Kaufmann*, a. a. O.
[2] *W. Kaufmann*, a. a. O.
[3] *J. Hueber*, a. a. O.

$c_a = 0{,}505$ (also nur halb so groß) enthält, gefolgert werden, daß die Konstante $\varkappa$ sich nicht viel von „eins" unterscheiden wird. Für die weitere Rechnung soll deshalb vorläufig $\varkappa = 1$ gesetzt werden. Damit wird für den vorliegenden Fall wegen $b = 87{,}8$ [cm]

$$l_0 = 87{,}8 \cdot 2{,}18 = 192 \text{ [cm]}$$

und

$$t_0 = \frac{l_0}{v_\infty} = 0{,}058 \text{ [sec]} .$$

Weiter ist

$$a = \sigma \frac{b}{2} = 0{,}864 \cdot 43{,}9 = 38 \text{ [cm]}$$

und wegen (35)

$$r_0 = 35{,}4 \text{ [cm]} .$$

Für eine beliebige Länge $0 \leq l \leq l_0$ gilt das Verhältnis

$$\frac{l}{l_0} = \frac{t}{t_0} = \bar{t} .$$

Trägt man nun nach (34) $\bar{r} = \bar{r}(\bar{t})$ auf, so kann mit Hilfe dieser Figur der zu jeder Länge l gehörige Verhältniswert $\bar{r} = r/r_0$ bestimmt werden, womit auch der zu l bzw. t gehörige Kernradius r bekannt ist. Streng genommen gilt Gleichung (34) nur für elliptische Γ_x-Verteilung. Da sie jedoch nur die Verhältnisgrößen $\bar{r}$ bzw. $\bar{t}$ enthält, wird man wohl keinen großen Fehler begehen, wenn man sie auch für die hier maßgebende nichtelliptische Γ_x-Verteilung anwendet.

Um nun den gesuchten Schwerpunktsabstand x_1 des zur Zeit t im Abstand l hinter dem Flügel bereits aufgewickelten Wirbelkerns zu erhalten, beachte man (Abb. 5), daß die dem Verhältniswert $\bar{r}$ entsprechende relative Zirkulation Γ_r/Γ_0 gleich Γ_x/Γ_0 sein muß (s. oben). Die zu Γ_x/Γ_0 gehörige Abszisse ist daher $2x/b = 1 - r/r_0$, womit x und somit nach (43a) auch x_1 berechnet werden kann.

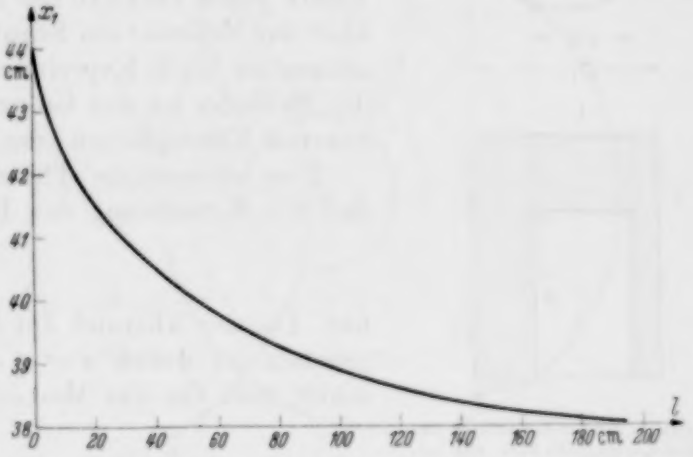


Abb. 6. Abszisse des Kernschwerpunktes als Funktion der Aufspullänge.

Die *Muttray*schen Druckmessungen liefern die Lage dieser Schwerpunkte für drei verschiedene Längen l hinter dem Flügel, und zwar ist

für				
	$l =$	4,9	20,2	61,0 [cm]
	$x_1 =$	41,9	41,0	39,8 „
	$x_1^* =$	42,8	40,8	39,2 „ .

Die entsprechenden Werte, welche sich nach der vorstehenden Theorie ergeben, sind als x_1^* darunter geschrieben. Abb. 6 veranschaulicht schließlich die vollständigen Ergebnisse der Rechnung.

Der Aufspulvorgang ist im Abstand $l_0 = 192$ [cm] hinter dem Flügel beendet, wozu nur die geringe Zeit von $t_0 = 0{,}058$ [sec] benötigt wird [1].

(Eingegangen am 8. Juni 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *W. Kaufmann*, München 2, Walther v. Dyck-Platz 1.

[1] Bei der Durchführung der Zahlenrechnungen hat mir Herr Dipl.-Ing. *R. Wurzbach* wertvolle Hilfe geleistet.

Theorie des Hochdruckmeßrohres mit ausmittiger Bohrung.

Von W. Wuest.

1. Einführung. Dickwandige Rohre mit konzentrischer Bohrung werden durch einen inneren Überdruck einem rotationssymmetrischen Spannungszustand unterworfen. Bei ausmittiger Bohrung geht diese Symmetrie verloren. Der Angriffspunkt der Axialkraft (0_0 in Abb. 1) fällt nicht mehr mit dem Schwerpunkt S der Querschnittsfläche zusammen, so daß ein Biegemoment auftritt, das eine Krümmung des ursprünglich geraden Rohres bewirkt. *O. Hoffmann* und *W. Francke*[1] haben diese Eigenschaft wohl erstmalig erkannt und zur Grundlage eines Hochdruckmeßverfahrens gemacht, bei dem die Auslenkung eines geraden, exzentrisch gebohrten Rohres zur Druckanzeige benutzt wird. Gegenüber der üblicherweise angewandten kreisförmig gekrümmten Röhrenfeder von ovalem Querschnitt („Bourdonfeder") hat das neue Meßverfahren bei sehr hohen Drücken (über 1000 at) den Vorteil, daß die Beanspruchungsspitzen niedriger sind und ein Sicherheitsschutz gegen Zerknall der Hochdruckfeder leicht anzubringen ist, indem über das Meßrohr ein Schutzrohr gestülpt wird. Ein solcher Sicherheitsschutz ist beim Experimentieren mit hohen Drücken unerläßlich, weil die Meßfeder an der Grenze ihrer Festigkeit arbeitet und die komprimierten Flüssigkeiten eine erhebliche potentielle Energie besitzen.

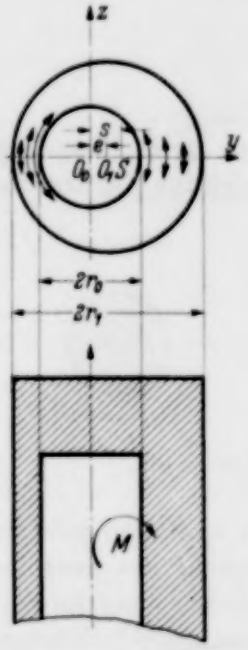


Abb. 1. Zustandekommen des Krümmungseffektes bei exzentrisch gebohrten Rohren unter Innendruck. S Schwerpunkt der Querschnittsfläche. Die Pfeile deuten an, daß auf der schwächeren Seite die Tangentialspannungen und damit auch die axiale Querkontraktion stärker als auf der gegenüberliegenden Seite ist.

Eine elementare Theorie des Vorganges würde davon ausgehen, daß die Krümmung des Rohres den Wert

$$j_0 = \frac{M}{E J_S} \tag{1}$$

hat. Da der Abstand des Schwerpunktes S vom Kraftangriffspunkt 0_0 gegeben ist durch $s = r_1^2 e/(r_1^2 - r_0^2)$, wo e die Exzentrizität bedeutet, erhält man für das Moment M

$$M = e \frac{r_1^2 r_0^2 \pi}{r_1^2 - r_0^2} p \,. \tag{2}$$

Das auf den Schwerpunkt bezogene Trägheitsmoment J_S ist

$$J_S = \frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_0^4) - \frac{\pi e^2 r_0^2 r_1^2}{r_1^2 - r_0^2} \,. \tag{3}$$

Damit liefert die elementare Rechnung für die Krümmung j_0

$$j_0 = \frac{4 e r_0^2 r_1^2}{(r_1^4 - r_0^4)(r_1^2 - r_0^2) - 4 e^2 r_0^2 r_1^2} \frac{p}{E} \,. \tag{4}$$

Versuche, über die noch berichtet wird, haben gezeigt, daß die Krümmung tatsächlich nur etwa die Hälfte der nach Formel (4) berechneten beträgt. In der Tat zeigt eine genauere Beschreibung des Vorganges, daß auf der schwächeren Seite, wie in Abb. 1 angedeutet ist, die Tangentialspannungen größer als auf der gegenüberliegenden Seite sind. Damit ist auf der schwächeren Seite auch die axiale Querkontraktion größer. Hierdurch wird also der ursprüngliche Krümmungseffekt abgeschwächt.

Bei der genaueren theoretischen Behandlung dieses Problems kann man davon ausgehen, daß offenbar abgesehen von der unmittelbaren Nachbarschaft der Rohrenden ein ebener Formänderungszustand vorliegt, so daß die Lösung in bekannter Weise von einer Spannungsfunktion abgeleitet werden kann, welche die Bipotentialgleichung befriedigen muß. Unabhängig voneinander sind von *M. Bricas*[2] und *E. Weinel*[3] Formeln zur Berechnung des exzentrischen Kreisringes unter innerer oder äußerer Druckbelastung aufgestellt worden, die aber voneinander abweichende Ergebnisse liefern. Die von *M. Bricas* angegebene Lösung, die sich als nicht ganz

[1] DRP. 743 613 (1937), Franz. Pat. 846 870 (1938). *K. Palzer*, Armaturen für den Hochdruckgerätebau. Maschinenelemente-Tagung Düsseldorf 1938. VDI-Verlag 1940.
[2] *M. Bricas*, La théorie de l'élasticité bidimensionelle. Athen 1936.
[3] *E. Weinel*, Z. angew. Math. Mech. 17 (1937), S. 284.

richtig erweisen wird, ist neuerdings auch in den 3. Band des Lehrbuches von *L. Föppl*[1] aufgenommen worden.

2. Spannungszustand in einem exzentrischen Rohr unter Innendruck. Bei einem ebenen Formänderungszustand können die Spannungen σ_y, σ_z und τ_{yz} von einer Spannungsfunktion F abgeleitet werden, wobei

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\,, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}$$

ist. Die Funktion F muß die Bipotentialgleichung $\Delta'\Delta' F = 0$ erfüllen, wobei $\Delta' \equiv \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ gesetzt ist.

Die axiale Spannung ist gegeben durch

$$\sigma_x = \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z) + E(k - jy)\,. \tag{5}$$

Hierbei drückt k die axiale Dehnung und j die Krümmung aus, deren Vorzeichen wir von vorneherein so wählen, daß j im vorliegenden Problem positiv wird. Wenn φ_1 und φ_2 beliebige Potentialfunktionen sind, so daß $\Delta'\varphi = 0$, ist

$$F = (y^2 + z^2)\,\varphi_1 + \varphi_2 \tag{6}$$

eine Lösung der Bipotentialgleichung.

Für die Berechnung des exzentrischen Rohres empfiehlt sich der Übergang zu bipolaren Koordinaten. Die bipolaren Koordinaten η, ζ sind mit den kartesischen Koordinaten y, z durch folgende Beziehung verknüpft[2]:

$$y + iz = c\,\mathfrak{Ctg}\,\frac{1}{2}(\eta + i\zeta). \tag{7}$$

Durch Trennung in Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$y = c\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta}\,, \tag{8a}$$

$$z = -\,c\,\frac{\sin\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta}\,. \tag{8b}$$

Ferner ist

$$y^2 + z^2 = c^2\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\eta + \cos\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta}\,. \tag{9}$$

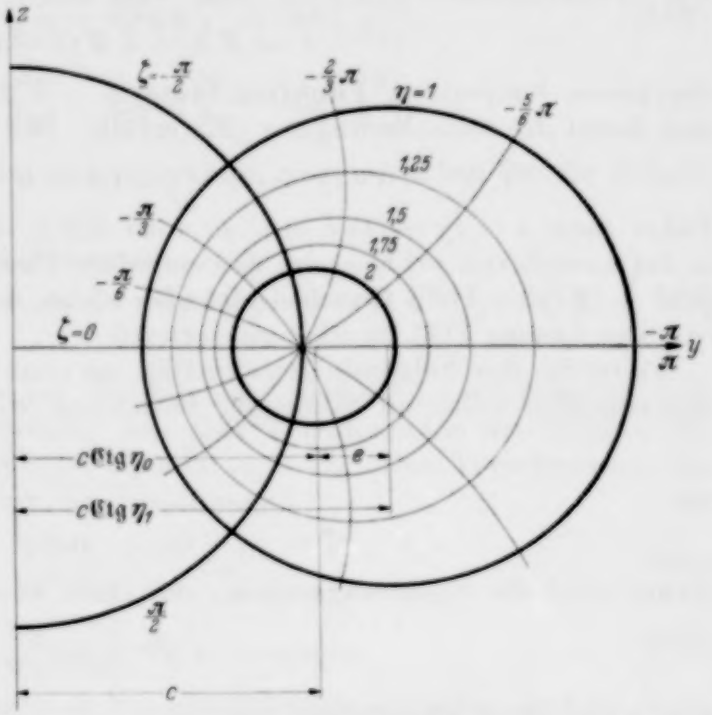


Abb. 2. Querschnitt durch ein exzentrisches Rohr in einem bipolaren Koordinatensystem.

Die Linien $\eta_j = \text{konst}$ sind Kreise mit dem Halbmesser $r = c/\mathfrak{Sin}\,\eta$ und dem Abstand $a = c\,\mathfrak{Ctg}\,\eta$ des Mittelpunktes vom Koordinatennullpunkt ($y = z = 0$). Das exzentrische Rohr ist begrenzt durch die Kreise $r_0 = c/\mathfrak{Sin}\,\eta_0$ und $r_1 = c/\mathfrak{Sin}\,\eta_1$, und die Exzentrizität e beträgt

$$e = c\,(\mathfrak{Ctg}\,\eta_1 - \mathfrak{Ctg}\,\eta_0) = \sqrt{r_1^2 + c^2} - \sqrt{r_0^2 + c^2}\,, \tag{10}$$

woraus man findet

$$4\,c^2 e^2 = (r_0^2 + r_1^2 - e^2)^2 - 4\,r_0^2 r_1^2. \tag{11}$$

An den Rändern $\eta_j = \eta_0$ und $\eta_j = \eta_1$ sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\eta = \eta_0: \qquad \tau_{\eta\zeta} = 0 \qquad \sigma_\eta = -\,p,$$

$$\eta = \eta_1: \qquad \tau_{\eta\zeta} = 0 \qquad \sigma_\eta = 0\,.$$

Da es sich um eine zweifach zusammenhängende Fläche handelt, sind noch die drei Eindeutigkeitsrelationen zu erfüllen, die physikalisch den Sinn haben, daß bei einem Umlauf auf der Ringfläche sowohl die Verdrehung $\psi_{\eta\zeta}$ als auch die Verschiebungen v_η und v_ζ eindeutig sein müssen.

[1] *L. Föppl*, Drang und Zwang. 3. Bd., S. 145. München 1947.

[2] *M. Bricas* und *L. Föppl* wählen statt dessen die Transformation $y + iz = c\,\mathfrak{Tg}\,\frac{1}{2}(\eta + i\zeta)$, was lediglich auf eine andere Nummerierung der ζ-Kreise hinaus kommt.

Die Spannungssumme $s' = \sigma_\eta + \sigma_\zeta = \Delta' F$ stellt eine Potentialfunktion dar. Wir bezeichnen mit t die zu s' konjugierte harmonische Funktion. Wenn wir berücksichtigen, daß die an den beiden Randkurven angreifenden Kräfte im vorliegenden Fall je für sich ein Gleichgewichtssystem bilden, liefern die Eindeutigkeitsrelationen folgende Bedingungen[1]:

$$\oint dt = 0, \tag{12}$$

$$\oint (s' + it)\, d(y + iz) = 0. \tag{13}$$

Die Gleichung (13) liefert für Real- und Imaginärteil je eine Aussage. Der Integrationsweg auf der Ringfläche ist dabei so zu wählen, daß die Rohrseele einmal umschlungen wird.

M. Bricas[2] hat folgende Lösung des Problems angegeben, die von *L. Föppl*[3] übernommen wurde:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\eta &= A - B\, \mathfrak{Sin}^2 \eta, \\ \sigma_\zeta &= A + B\, \mathfrak{Sin}^2 \eta + 2\, B (1 - \cos\zeta\, \mathfrak{Cof}\, \eta), \\ \tau_{\eta\zeta} &= 0\,. \end{aligned}\right| \tag{14}$$

Die Spannungssumme $s' = \sigma_\eta + \sigma_\zeta$ wird also

$$s' = 2\, A + 2\, B (1 - \cos\zeta\, \mathfrak{Cof}\, \eta).$$

Die hierzu konjugierte Funktion lautet $t = -2\, B \sin\zeta\, \mathfrak{Sin}\, \eta$. Die Größe t ist also eindeutig und damit die erste Bedingung (12) erfüllt. Die Bedingung (13) geht über in:

$$\int (s' + it)\, d(y + iz) = \oint 2 (A + B - B\, \mathfrak{Cof}\, (\eta + i\zeta)\, d(y + iz)\,.$$

Führt man $\alpha = (y + iz)/c$ ein, so wird $\mathfrak{Cof}\, (\eta + i\zeta) = (\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1)$. Bei der Integration in der komplexen α-Ebene ist der singuläre Punkt $\alpha = 1$ zu umschlingen. Das Umlaufintegral $\oint (\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1)\, d\alpha$ verschwindet aber nicht, da $\alpha = 1$ ein Pol erster Ordnung des Integranden ist. Die Lösung (14) ist also zu verwerfen.

Es ist für das Folgende zweckmäßig, zu einer komplexen Spannungsfunktion $F^* = F + i\bar{F}$ überzugehen, wobei an Stelle der Beziehung (6) folgende tritt:

$$F^* = (y^2 + z^2)\, q_1^* + q_2^* \tag{6a}$$

mit

$$q_1^* = q_1 + i\bar{q}_1 \quad \text{und} \quad q_2^* = q_2 + i\bar{q}_2\,.$$

Damit wird die Spannungssumme mit ihrer komplexen Ergänzung

$$s' + it = \Delta' F^* = 4\, q_1^* + 4\, (y + iz)\, \frac{d\, q_1^*}{d\, (y + iz)} \tag{15}$$

oder unter Berücksichtigung von (7)

$$s' + it = 4\, q_1^* - 4\, \mathfrak{Sin}\, (\eta + i\zeta)\, \frac{d\, q_1^* (\eta + i\zeta)}{d\, (\eta + i\zeta)}\,. \tag{15a}$$

Die von *E. Weinel*[4] angegebene Lösung legt es nahe, für die Potentialfunktionen q_1^* und q_2^* folgende Ansätze zu wählen:

$$q_1^* = A_1 + A_2 (\eta + i\zeta) + A_3\, \mathfrak{Cof}\, (\eta + i\zeta) + A_4\, \mathfrak{Sin}\, (\eta + i\zeta), \tag{16a}$$

$$q_2^* = c^2 \left(B_2 (\eta + i\zeta) + B_3\, \mathfrak{Cof}\, (\eta + i\zeta) + B_4\, \mathfrak{Sin}\, (\eta + i\zeta)\right). \tag{16b}$$

Die A_i und B_i sind hierbei reelle Konstante.

Durch Einsetzen von (16a) in (15a) erhält man für die Spannungssumme mit ihrer komplexen Ergänzung

$$\begin{aligned} s' + it = {} & (4\, A_1 + 2\, A_3) + 4\, A_2 (\eta + i\zeta) + A_3 [4\, \mathfrak{Cof}\, (\eta + i\zeta) \\ & - 2\, \mathfrak{Cof}\, 2(\eta + i\zeta)] + A_4 [4\, \mathfrak{Sin}\, (\eta + \zeta) - 2\, \mathfrak{Sin}\, 2\, (\eta + i\zeta)] \end{aligned} \tag{17}$$

Aus der ersten Umlaufbedingung (12) folgt sofort $A_2 = 0$, da sich sonst t bei einem Umlauf um $8\pi A_2$ ändern würde. Die Eindeutigkeitsrelation (13) wird von den Koeffizienten von A_3 und A_4 einzeln für sich erfüllt, wie nachstehend gezeigt wird. Man führt hierzu wiederum die komplexe Veränderliche $\alpha = (y + i\zeta)/c$ ein, so daß $\mathfrak{Sin}\, (\eta + i\zeta) = 2\alpha/(\alpha^2 - 1)$ und $\mathfrak{Cof}\, (\eta + i\zeta) = (\alpha^2 + 1)/$

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik. S. 102. Berlin 1939.
[2] a. a. O.
[3] a. a. O.
[4] a. a. O. S. 128.

(α^2-1). Das komplexe Umlaufintegral (13) lautet dann für die beiden Koeffizienten von A_3 und A_4

$$\oint \frac{4(\alpha^4-1)-16\alpha^2}{(\alpha^2-1)^2}\,d\alpha = \oint\left[\frac{\alpha^3-2-3\alpha}{(\alpha-1)^2}-\frac{\alpha^3+2-3\alpha}{(\alpha+1)^2}\right]d\alpha = 0\,,$$

$$\oint \frac{8\alpha(\alpha^2-1)-8\alpha(\alpha^2+1)}{(\alpha^2-1)^2}\,d\alpha = \oint\left[\frac{4}{(\alpha+1)^2}-\frac{4}{(\alpha-1)^2}\right]d\alpha = 0\,.$$

In beiden Fällen verschwinden die Umlaufintegrale um die Stelle $\alpha=1$, weil der Integrand keine Pole erster Ordnung enthält. Von dem Verschwinden der Pole erster Ordnung überzeugt man sich leicht, wenn man $\bar{\alpha}=\alpha-1$ im Integranden einführt. Damit ist also erwiesen, daß die Ansätze (6a), (16a) und (16b) mit $A_2=0$ die Eindeutigkeitsbedingungen erfüllen, und es ist noch zu prüfen, ob mit diesen Ansätzen auch die vier Randbedingungen erfüllt werden können.

Nach *Biezeno-Grammel*[1] sind die Spannungen für bipolare Koordinaten gegeben durch

$$\tau_{\eta\zeta} = -\frac{1}{c^2}(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\left[(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial\eta\,\partial\zeta}+\sin\zeta\frac{\partial F}{\partial\eta}+\mathfrak{Sin}\,\eta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right], \tag{18a}$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\left[(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}-\mathfrak{Sin}\,\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}+\sin\zeta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right], \tag{18b}$$

$$\sigma_\zeta = \frac{1}{c^2}(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\left[(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\frac{\partial^2 F}{\partial\eta^2}+\mathfrak{Sin}\,\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}-\sin\zeta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right]. \tag{18c}$$

Wenn man F, d. h. den Realteil von F^* hierin einsetzt, erhält man zunächst für die Schubspannung

$$\begin{aligned}\tau = -(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)[&-2(\mathfrak{Cof}\,\eta+\cos\zeta)\,\mathfrak{Sin}\,\eta\cos\zeta\,A_3 - \\ &-(\mathfrak{Cof}\,2\eta+2\,\mathfrak{Cof}\,\eta\cos\zeta)\sin\zeta\,A_4+B_2\sin\zeta-2(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\,\mathfrak{Sin}\,\eta\sin\zeta\,B_3 \\ &-(\mathfrak{Cof}\,2\eta-2\,\mathfrak{Cof}\,\eta\cos\zeta)\sin\zeta\,B_4]\,.\end{aligned} \tag{19}$$

In der eckigen Klammer kommen also Glieder vor, die mit $\sin\zeta$ und $\sin\zeta\cos\zeta$ behaftet sind und an den Rändern für sich verschwinden müssen. Aus dem Verschwinden des Gliedes mit $\sin\zeta\cos\zeta$ an den beiden Rändern findet man $A_3=B_3$ und $A_4=B_4$. Das Verschwinden des Gliedes mit $\sin\zeta$ an den beiden Rändern liefert die Beziehungen

$$A_3 = B_3 = -\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{Sin}\,(\eta_0+\eta_1)}{\mathfrak{Cof}\,(\eta_0-\eta_1)}B_2, \tag{20a}$$

$$A_4 = B_4 = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{Cof}\,(\eta_0+\eta_1)}{\mathfrak{Cof}\,(\eta_0-\eta_1)}B_2. \tag{20b}$$

In gleicher Weise findet man für die beiden übrigen Spannungskomponenten σ_η und σ_ζ, wenn man $A_3=B_3$ und $A_4=B_4$ setzt,

$$\begin{aligned}\sigma_\eta = (2A_1+A_3)&-\mathfrak{Sin}\,\eta\,(\mathfrak{Cof}\,\eta\cos\zeta)\,B_2 \\ &-2\,\mathfrak{Sin}\,\eta\cos\zeta(\mathfrak{Sin}\,2\eta\,A_3+\mathfrak{Cof}\,2\eta\,A_4)+(\mathfrak{Cof}\,2\eta\,A_3+\mathfrak{Sin}\,2\eta\,A_4).\end{aligned} \tag{21}$$

$$\sigma_\zeta = \sigma_\eta+2(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)[\mathfrak{Sin}\,\eta\,B_2+2\cos\zeta(\mathfrak{Cof}\,2\eta\,A_3+\mathfrak{Sin}\,2\eta\,A_4)]. \tag{22}$$

Setzt man zur Abkürzung noch $2A_1+A_3=A$ und $B_2=B$ und führt nach *Weinel*

$$\mu_0=(\eta_0+\eta_1)/2 \quad\text{und}\quad \mu_1=(\eta_0-\eta_1)/2 \quad\text{sowie}\quad \mu=\eta-\mu_0$$

ein, so erhält man für die drei Spannungskomponenten

$$\sigma_\eta = A-B\left[\frac{1}{2}\left(\mathfrak{Sin}\,2\eta-\frac{\mathfrak{Sin}\,2\mu}{\mathfrak{Cof}\,2\mu_1}\right)-\mathfrak{Sin}\,\eta\left(1-\frac{\mathfrak{Cof}\,2\mu}{\mathfrak{Cof}\,2\mu_1}\right)\cos\zeta\right], \tag{23a}$$

$$\sigma_\zeta = \sigma_\eta+2B(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\left[\mathfrak{Sin}\,\eta+\frac{\mathfrak{Sin}\,2\mu}{\mathfrak{Cof}\,2\mu_1}\cos\zeta\right], \tag{23b}$$

$$\tau_{\eta\zeta} = -B(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)\sin\zeta\left(1-\frac{\mathfrak{Cof}\,2\mu}{\mathfrak{Cof}\,2\mu_1}\right). \tag{23c}$$

Durch die Randbedingungen $\sigma_\eta=-p$ für $\eta=\eta_0$ (bzw. $\mu=\mu_1$) und $\sigma_\eta=0$ für $\eta=\eta_1$ (bzw. $\mu=-\mu_1$) werden die Konstanten A und B bestimmt zu

[1] a. a. O. S. 128.

$$A = 2\,A_1 + A_3 = +\frac{1}{2}\,\frac{1 + \mathfrak{Ctg}\,2\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,2\eta_1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0 + \mathfrak{Sin}^2\eta_1}\,p, \tag{24}$$

$$B = B_2 = +\frac{\mathfrak{Ctg}\,2\mu_1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0 + \sin^2\eta_1}\,p. \tag{25}$$

Damit nimmt die Tangentialspannung σ_ζ am inneren Rand η_0 und am äußeren Rand η_1 folgende Werte an:

Innenrand $\eta = \eta_0$:

$$\sigma_\zeta = -p + 2\,p\,\frac{\mathfrak{Ctg}\,2\mu_1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0 + \mathfrak{Sin}^2\eta_1}\,(\mathfrak{Cof}\,\eta_0 - \cos\varphi)\,(\mathfrak{Sin}\,\eta_0 + \mathfrak{Tg}\,2\mu_1\cos\varphi)\,. \tag{26a}$$

Außenrand $\eta = \eta_1$:

$$\sigma_\zeta = 2\,p\,\frac{\mathfrak{Ctg}\,2\mu_1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0 + \mathfrak{Sin}^2\eta_1}\,(\mathfrak{Cof}\,\eta_1 - \cos\zeta)\,(\mathfrak{Sin}\,\eta_1 - \mathfrak{Tg}\,2\mu_1\cos\zeta). \tag{26b}$$

Die Höchstwerte σ_0 und σ_1 hiervon ergeben sich an der engsten Stelle $\zeta = \pi$. Macht man davon Gebrauch, daß

$$\mathfrak{Sin}\,\eta_0 = \frac{e}{r_0}\,\mathfrak{Cof}\,\eta_0 = \frac{r_1^2 - r_0^2 - e^2}{2\,e\,r_0}\,,$$

$$\mathfrak{Sin}\,\eta_1 = \frac{e}{r_1}\,\mathfrak{Cof}\,\eta_1 = \frac{r_1^2 - r_0^2 + e^2}{2\,e\,r_1}\,,$$

$$\mathfrak{Ctg}\,2\mu_1 = \frac{r_1^2 + r_0^2 - e^2}{2\,e\,c}$$

ist, so erhält man schließlich folgende Formeln für die größte Tangentialspannung innen und außen;

$$\sigma_0 = 2\,p\,\frac{r_1^2}{r_1^2 - (r_0 + e)^2}\left(1 - e\,\frac{2\,r_0 + e}{r_1^2 + r_0^2}\right) - p, \tag{27a}$$

$$\sigma_1 = 2\,p\,\frac{r_0^2}{(r_1 - e)^2 - r_0^2}\left(1 + e\,\frac{2\,r_1 - e}{r_1^2 + r_0^2}\right). \tag{27b}$$

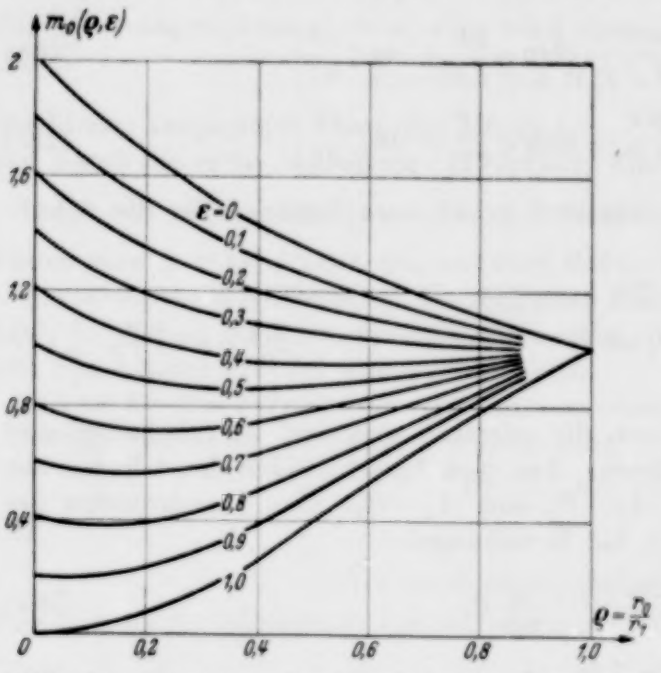


Abb. 3. Beiwertfunktion $m_0\,(\varrho, \varepsilon)$ für die Berechnung der größten Beanspruchung eines exzentrischen Rohres unter Innendruck in Abhängigkeit vom Radienverhältnis ϱ und vom Exzentrizitätsmaß ε.

Die Formeln (27a) und (27b) stimmen mit den von *Weinel* abgeleiteten überein, während die Formeln (26a) und (26b) bei *Weinel* Druckfehler enthalten. Um auch den Fall einer äußeren Druckbelastung zu erhalten, braucht man lediglich einen hydrostatischen Druck p_1 zu überlagern. Die sich daraus für die Tangentialspannung innen und außen ergebenden allgemeineren Formeln sind von *Weinel* angegeben.

Es ist zweckmäßig, dem Vorgang von *Weinel* folgend, an Stelle der Abmessungen r_0, r_1, e die dimensionslosen Größen

$$\varrho = \frac{r_0}{r_1}\ \text{(Radienverhältnis)} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \frac{e}{r_1 - r_0}\ \text{(Exzentrizitätsmaß)}$$

einzuführen, so daß

$$\sigma_0 = p\,\frac{m_0\,(\varrho, \varepsilon)}{(1 - \varrho)\,(1 - \varepsilon)} - p \tag{28}$$

wird. Der Beiwert m_0 ist in Abb. 3 in Abhängigkeit von ϱ und ε aufgetragen.

Nach Untersuchungen an kaltgereckten, dickwandigen Rohren[1] wird die Beanspruchung am besten durch die Gestaltänderungstheorie von *Huber-Nadai* wiedergegeben. In unserem Fall ist also für die größte Beanspruchung zu setzen

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\,\sqrt{3}\,(\sigma_\zeta - \sigma) = \sqrt{3}\,\frac{r_1^2}{r_1^2 - (r_0 + e)^2}\left(1 - e\,\frac{2\,r_0 + e}{r_1^2 + r_0^2}\right)p. \tag{29}$$

[1] *H. Klein*, Untersuchungen an kaltgereckten dickwandigen Rohren unter besonderer Berücksichtigung der Veränderungen der Werkstoffeigenschaften. Diss. Aachen 1929. Mitt. KWI Eisenforschg. Düsseldorf Abh. 138 (1929), Bd. 11, Lief. 20.

3. Berechnung der Krümmung. Für die axiale Spannung gilt nach (5)

$$\sigma_x = \frac{1}{m}(\sigma_\eta + \sigma_\zeta) + E(k - j\bar{y}).$$

Hierbei wird $\bar{y} = y - c\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0$ vom Mittelpunkt des Innenkreises aus gerechnet. Die Konstanten k und j sind so zu bestimmen, daß

1. die über die Querschnittsfläche integrierten Axialspannungen gleich der vom Flüssigkeitsdruck auf den Innenkreis ausgeübten Kraft ist;
2. das Moment der Axialspannungen bezogen auf den Mittelpunkt des Innenkreises verschwindet.

Der rechnerische Ausdruck für diese Bedingungen lautet

$$\int_F \sigma_x\,dF = r_0^2\,\pi p. \tag{30}$$

$$\int_F \sigma_x \bar{y}\,dF = 0. \tag{31}$$

Die Spannungssumme $s' = \sigma_\eta + \sigma_\zeta$ ist aber nach (17) oder (21) und (22)

$$\begin{aligned} s' = 2(2A_1 + A_3) + 4(\mathfrak{Cof}\,\eta\cos\zeta\,A_3 + \mathfrak{Sin}\,\eta\cos\zeta\,A_4) - 2(\mathfrak{Cof}\,2\eta\cos 2\zeta\,A_3 \\ + \mathfrak{Sin}\,2\eta\cos 2\zeta\,A_4). \end{aligned} \tag{32}$$

Bei der Integration ist für das Flächenelement dF zu setzen:

$$dF = \frac{c^2}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2}\,d\eta\,d\zeta.$$

Die Durchführung der Integrationen ergibt (vgl. Anhang)

$$\int_F s'\,dF = 2\pi r_0^2 p.$$

$$\int_F s'\bar{y}\,dF = 0.$$

Damit gehen die Bedingungen (30) und (31) über in

$$\frac{2}{m} r_0^2 p + E[(r_1^2 - r_0^2)k - r_1^2 ej] = r_0^2 p.$$

$$E\left[r_1^2 ek - \left(\frac{1}{4}(r_1^4 - r_0^4) + e^2 r_1^2\right)j\right] = 0,$$

woraus man die Krümmung j berechnet zu

$$j = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{4\,e\,r_0^2\,r_1^2}{(r_1^4 - r_0^4)(r_1^2 - r_0^2) - 4\,e^2\,r_0^2\,r_1^2}\,\frac{p}{E}. \tag{35}$$

Ein Vergleich mit der in der Einführung auf elementare Weise abgeleiteten Formel (4) ergibt das einfache Ergebnis

$$j = \left(1 - \frac{2}{m}\right) j_0. \tag{36}$$

Es sei an dieser Stelle bemerkt, daß die von *M. Bricas* und *L. Föppl* benutzten Lösungen (14) zum gleichen Ergebnis führen. Bei der Integration heben sich also die Unterschiede zwischen beiden Ansätzen gerade wieder heraus.

Es empfiehlt sich auch hier wieder zu dimensionslosen Größen überzugehen. Mit dem Radienverhältnis ϱ und dem Exzentrizitätsmaß ε erhält man

$$j = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{1}{r_1}\,\frac{1/\varepsilon\,(1-\varrho)}{\frac{(1+\varrho)}{(1-\varrho)}\,\frac{(1-\varrho^4)}{4\,\varrho^2\,\varepsilon^2} - 1} = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{1}{r_1}\,K(\varrho, \varepsilon). \tag{37}$$

Es ist besonders interessant, die auf diese Weise für K erhaltenen Werte in Abhängigkeit von der Beanspruchung σ_p nach (29) aufzutragen. Abb. 4 zeigt, daß sich die für verschiedene ϱ berechneten Kurven durch eine Hüllkurve einschließen lassen, welche für eine gegebene Beanspruchung Höchstwerte für den Federweg liefert. Man erkennt daraus, daß das Exzentrizitätsmaß zweckmäßigerweise $\varepsilon = 0{,}6$ zu wählen ist. In Abb. 4 ist auch angegeben, wie das Radienverhältnis zu wählen ist, um bei gegebener Beanspruchung Bestwerte der Krümmung zu erzielen.

Bei der Anwendung dieser Ergebnisse auf die Praxis ist jedoch zu beachten, daß man die dickwandigen Meßrohre für sehr hohe Drücke einer Autofrettage (Kaltreckung) unterzieht, wobei die inneren Zonen des Rohres zum plastischen Fließen gebracht werden. Hierdurch werden dem Meßrohr nach der Entlastung innere Spannungen eingeprägt, die der späteren Betriebsbeanspruchung entgegenwirken. Gleichzeitig tritt hierbei eine Erhöhung der Streckgrenze des Werkstoffes ein. Wenn man das exzentrische Rohr als Druckmeßglied verwenden will, muß die Betriebsbeanspruchung im elastischen Gebiet bleiben, so daß die für die Krümmung abgeleitete Formel auch bei vorheriger Autofrettage weiterhin gültig bleibt. Jedoch ist es bei sehr dickwandigen Federn möglich, viel höhere Druckwerte zu erreichen, als es der nach Formel (29) errechneten Beanspruchung und der gemessenen Streckgrenze des Werkstoffes entspricht. Im äußersten Fall wird man etwa eine Verdopplung der Druckgrenze erreichen können. Obwohl Versuche über 8000 kg/cm² bisher nicht vorliegen, wird man doch erwarten können, daß bei geeigneter Autofrettage diese Grenze noch erheblich überschritten werden kann.

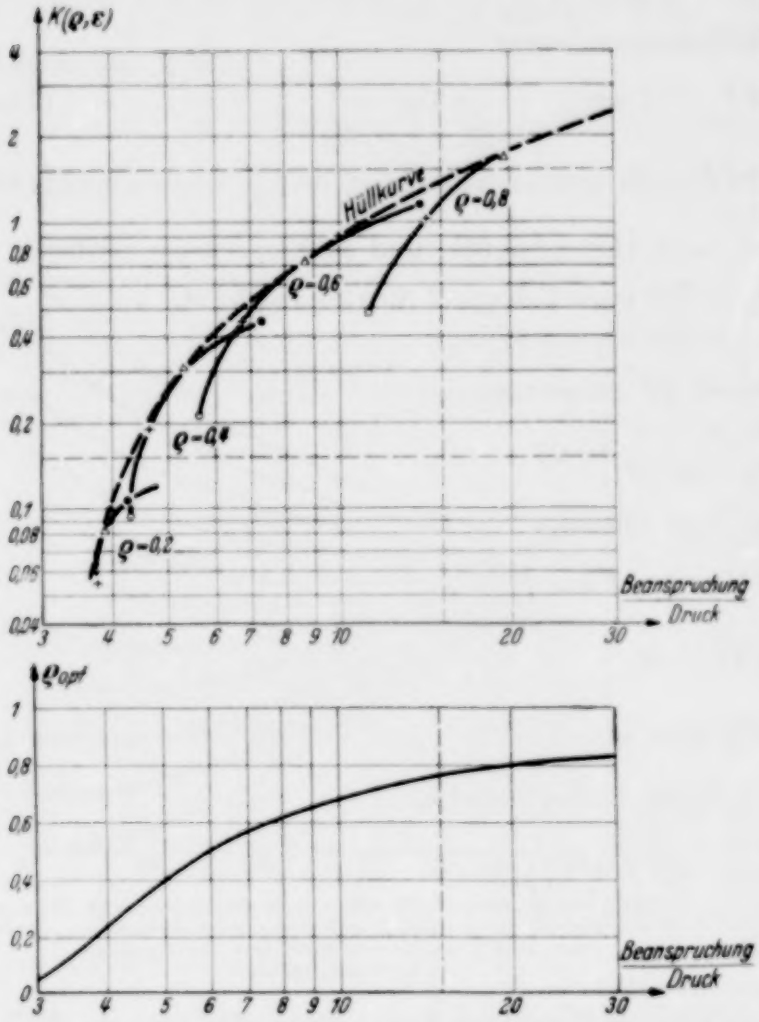


Abb. 4. Krümmung eines exzentrischen Rohres unter Innendruck in Abhängigkeit von der größten Beanspruchung. Die Bestwerte sind durch eine Hüllkurve gegeben. o : $\varepsilon = 0{,}2$; + : $\varepsilon = 0{,}4$; △ : $\varepsilon = 0{,}6$; ● : $\varepsilon = 0{,}8$. Im unteren Schaubild ist jeweils angegeben, wie das Radienverhältnis ϱ zweckmäßigerweise zu wählen ist.

4. Federweg des exzentrischen Rohres. Die Winkeldrehung des Federendes sowie der Federweg ergibt sich aus der Krümmung in einfacher Weise. Die Winkeldrehung ist nämlich in Bogenmaß

$$\Delta\varphi = lj = \frac{l}{r_1}\left(1 - \frac{2}{m}\right) K \frac{p}{E} . \qquad (38)$$

Den Federweg f berechnen wir aus Abb. 5 zu

$$f = R\,(1 - \cos \Delta\varphi) \approx \frac{1}{2} R \Delta\varphi^2 = \frac{1}{2} l^2 j$$

oder

$$f = \frac{l^2}{d_1}\left(1 - \frac{2}{m}\right) K \frac{p}{E} , \qquad (39)$$

wenn $d_1 = 2\,r_1$ der Außendurchmesser ist. Um großen Federweg zu erhalten, empfiehlt sich also, die Querschnittsabmessungen so gering zu halten, wie es die geforderte Richtkraft und die Fertigungsmöglichkeiten erlauben.

Meist wird der Federweg aber nicht am theoretischen Federende abgenommen, sondern an einem mit dem Federende fest verbundenen Teil. Abb. 6 zeigt zwei charakteristische Ausführungsarten. Im ersten Fall wird der Federweg an einem Verlängerungsstück abgenommen, im zweiten Fall wird er zur Einspannstelle zurückgeführt. Die Rückführung des Federweges durch ein übergestülptes Rohr[1] bringt meßtechnische Vorteile. Außerdem kann dieses Rohr gleichzeitig als Schutzrohr bei einem etwaigen Bruch der Hochdruckfeder verwendet werden.

Bei einer Verlängerung nach oben erhält man (vgl. Abb. 5):

$$f_1 = f\left(1 + 2\,\frac{a_1}{l}\right) , \qquad (40a)$$

bei einer Rückführung nach unten dagegen

$$f_2 = f\left(1 - 2\,\frac{a_2}{l}\right) . \qquad (40b)$$

[1] DRP. ang. Sch. 119 817/42d.

5. Vergleich mit Messungen. Im Februar 1939 wurden von den Herren *O. Schumacher* und *H. Bremer* auf Anregung der Firma F. Uhde, Dortmund in der Meßgeräteabteilung der Firma Schäffer & Budenberg, Magdeburg-Buckau mehrere Messungen an exzentrisch gebohrten Hochdruckmeßrohren durchgeführt. Bei der Auswertung dieser Messungen wollen wir so vorgehen, daß wir zunächst aus den Formeln (40a) und (40b) auf den reduzierten Federweg f zurückrechnen und dann aus (38) j bestimmen. Unter Zugrundelegung eines Elastizitätsmoduls $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ kg/cm² berechnen wir dann j_0 aus Formel (4). Aus dem Verhältnis $j/j_0 = 1 - 2/m$ kann dann die Querkontraktionszahl m bestimmt werden und mit bekannten Werten verglichen werden.

Messungen an exzentrisch gebohrten Rohren.

Nr.	p kg/cm²	r_0 mm	r_1 mm	e mm	l mm	a mm	$f_{1,2}$ mm	$j\,10^6$ 1/mm	$j_0\,10^6$ 1/mm	j/j_0
1	2000	4,5	6,5	1	300	85	4,08	58,0	121,5	0,478
1	2000	4,5	6,5	1	300	85	4,26	60,4	121,5	0,498
3	4000*	2,5	7,25	1	300	85	0,77	10,9	20,0	0,545
4	4000*	2,0	7,8	1	300	85	0,30	4,25	8,89	0,478
5	2000	4,5	7,0	1	424	—415	—3,45	36,7	71,1	0,516
6	2000	4,5	7,75	1	424	—415	—1,76	18,75	37,9	0,495

* Diese Federn sind für einen Nenndruck von 8000 kg/cm² bestimmt. Aus meßtechnischen Gründen erfolgte die Messung bei 4000 kg/cm².

Man erhält als Mittelwert für das Verhältnis $j/j_0 = 1 - 2/m$ den Wert 0,5. Diesem entspricht eine Querkontraktionszahl $m = 4$, wie sie oft bei Festigkeitsrechnungen zugrunde gelegt wird.

6. Zusammenfassung. Ausmittig gebohrte Rohre haben die Eigenschaft, daß sie sich unter der Wirkung eines Innendruckes nach der stärkeren Seite der Wand durchkrümmen. Diese Eigenschaft kann meßtechnisch insbesondere zur Messung hoher Drücke ausgenutzt werden. Der

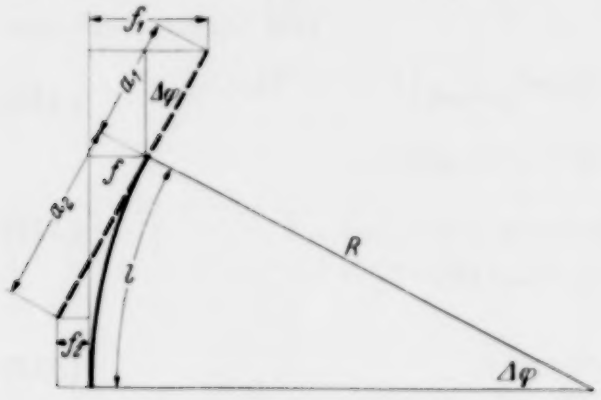


Abb. 5. Berechnung des Federweges bei einem Verlängerungsstück oder bei Rückführung der Bewegung.

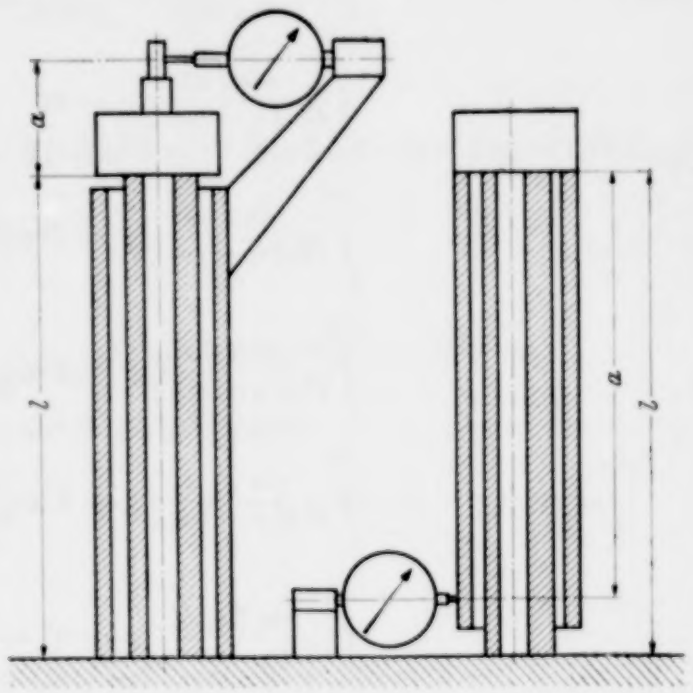


Abb. 6. Schematische Darstellung zweier Ausführungsbeispiele von Hochdruckmeßrohren mit Ablesung des Federweges durch eine Meßuhr.

Spannungszustand in exzentrischen Rohren ist von verschiedener Seite mit z. T. voneinander abweichenden Ergebnissen behandelt worden. Die Beziehungen für den Spannungszustand werden daher erneut abgeleitet und auf die Berechnung der Krümmung angewandt.

Anhang.

Zur Berechnung der Integrale (30) und (31). Es ist nützlich, zunächst einige Umlaufintegrale zusammenzustellen, die für die Berechnung dieser Integrale gebraucht werden. Da solche Umlaufintegrale bei Rechnungen mit bipolaren Koordinaten vielleicht auch anderswo gebraucht werden, ist diese Liste noch etwas vervollständigt worden.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta} = 2\pi \frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\eta}, \tag{A1}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2} = 2\pi \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta}{\mathfrak{Sin}^3\,\eta}, \tag{A2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^3} = 2\pi \left(\frac{\mathfrak{Cof}^2\,\eta}{\mathfrak{Sin}^5\,\eta} + \frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{Sin}^5\,\eta} \right), \tag{A3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^4} = 2\pi \left(\frac{\mathfrak{Cof}^3\,\eta}{\mathfrak{Sin}^7\,\eta} + \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta}{\mathfrak{Sin}^7\,\eta} \right), \tag{A4}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta} = 2\pi\,(\mathfrak{Ctg}\,\eta - 1), \tag{A5}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2} = 2\pi \frac{1}{\mathfrak{Sin}^3\,\eta}, \tag{A6}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^3} = 3\pi \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta}{\mathfrak{Sin}^5\,\eta}, \tag{A7}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^n} = 0, \tag{A8}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^3} = 2\pi\,(\mathfrak{Ctg}^3\,\eta - 3\,\mathfrak{Ctg}\,\eta + 2), \tag{A9}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2} = 3\pi \frac{1}{\mathfrak{Sin}^5\,\eta}, \tag{A10}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^4} = 5\pi \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta}{\mathfrak{Sin}^7\,\eta}, \tag{A11}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\zeta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^n} = 0. \tag{A12}$$

Die einzelnen Glieder der Integrale (30) und (31) nehmen damit folgende Form an:

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\eta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2} = \pi \left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_1} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0} \right), \tag{A13}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{Cof}\,\eta \cos\zeta\, d\eta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2} = \pi \left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_1} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\eta_0} \right), \tag{A14}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta \cos\zeta\, d\eta\, d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta - \cos\zeta)^2} = 2\pi\,(\mathfrak{Ctg}\,\eta_1 - \mathfrak{Ctg}\,\eta_0), \tag{A15}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Cof}\,2\eta\cos 2\zeta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^2}=2\pi\Big(\mathfrak{Cof}\,2\eta_1-\mathfrak{Cof}\,2\eta_0-\mathfrak{Sin}\,2\eta_1+\mathfrak{Sin}\,2\eta_0+\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\eta_1}-\frac{1}{2\,\mathfrak{Sin}^2\eta_0}\Big), \tag{A16}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta\cos 2\zeta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^2}=2\pi\left[(\mathfrak{Cof}\,2\eta_0-\mathfrak{Cof}\,2\eta_1)-(\mathfrak{Sin}\,2\eta_0-\mathfrak{Sin}\,2\eta_1)+2\,(\mathfrak{Ctg}\,\eta_1-\mathfrak{Ctg}\,\eta_0)\right], \tag{A17}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{\eta}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^3}=\pi\left(\frac{\mathfrak{Cof}\,\eta_1}{\mathfrak{Sin}^3\eta_1}-\frac{\mathfrak{Cof}\,\eta_0}{\mathfrak{Sin}^3\eta_0}\right). \tag{A18}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,\eta\cos\zeta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^3}=\pi\,(\mathfrak{Ctg}^3\eta_1-\mathfrak{Ctg}^3\eta_0), \tag{A19}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Sin}^2\eta\cos\zeta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^3}=\frac{3}{2}\,\pi\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_1}-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0}\right). \tag{A20}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta\,\mathfrak{Cof}\,2\eta\cos 2\zeta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^3}=\pi\,(\mathfrak{Ctg}^3\eta_1-\mathfrak{Ctg}^3\eta_0+3\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_1-3\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0), \tag{A21}$$

$$\int_{\eta_1}^{\eta_0}\int_{0}^{2\pi}\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta\cos 2\zeta\,d\eta\,d\zeta}{(\mathfrak{Cof}\,\eta-\cos\zeta)^3}=3\,\pi\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_1}-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0}\right). \tag{A22}$$

Insgesamt wird also das Integral (30)

$$\int_F s'\,dF=2\,(A+A_3)\,\pi\,(r_1^2-r_0^2)-4\,\pi\,c^2\,(A_3-A_4)\,[\mathfrak{Cof}\,2\eta_1-\mathfrak{Sin}\,2\eta_1-(\mathfrak{Cof}\,2\eta_0-\mathfrak{Sin}\,2\eta_0)]$$
$$=\left(-2\,\frac{r_1^2-r_0^2}{r_1^2+r_0^2}+4\,\frac{r_1^2}{r_1^2+r_0^2}\right)\pi r_0^2\,p=2\,\pi\,r_0^2\,p$$

und das Integral (31)

$$\int_F s'\,y\,dF=\Big|2\,A\left(\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_1}\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_1-\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\eta_0}\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0\right)+2\,A_3\,(\mathfrak{Ctg}^3\eta_1-\mathfrak{Ctg}^3\eta_0$$
$$-3\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_1+3\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0)\Big|\,\pi c^3-c\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0\int_F s'\,dF$$
$$=[e r_1^2+(r_1^2-r_0^2)\,c\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0]\,\pi A+[r_1^2+r_0^2+r_0 r_1\,\mathfrak{Cof}\,(\eta_0-\eta_1)]\,e\,\pi A_3$$
$$-2\,c\,\mathfrak{Ctg}\,\eta_0\,\pi r_0^2\,p=0.$$

(Eingegangen am 10. Juni 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Wuest*, (20b) Göttingen (Hann.), Zeppelinstr. 7.

Beiträge zur Theorie der durch gleichförmigen Schub beanspruchten Platte.

III. Mitteilung.

Von W. Kucharski.

1. Die grundlegende Differentialgleichung als Wellengleichung. In der folgenden Mitteilung soll unter Hinweis auf die Grundlagen der in Bd. 18, Heft 6 dieser Zeitschrift zum gleichen Thema veröffentlichten Mitteilung I die grundlegende Differentialgleichung

$$w_{tt} + \Delta\Delta w - \vartheta w_{xy} = 0 \tag{1}$$

vom Standpunkt der Wellenlehre behandelt werden[1]. Durch

$$w = f(x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct) \tag{2}$$

wird eine Welle mit geradliniger Front dargestellt, die normal zu sich selbst mit der Wellengeschwindigkeit c fortschreitet. c bildet mit der x-Achse den Winkel α. Der Sinn dieser Aussage ist der, daß w für konstante Werte des Argumentes

$$s_1 = x\cos\alpha + y\sin\alpha - ct \tag{3}$$

konstant ist. $s_1 =$ konst. bedeutet aber

$$y = -\operatorname{ctg}\alpha\, x + \frac{ct}{\sin\alpha} + \text{konst.} \tag{4}$$

Dies sind für jeweils feste Werte von t gerade Linien, die zueinander parallel sind und mit der x-Achse den Winkel

$$\beta = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \tag{5}$$

einschließen (Abb. 2). Bei wachsendem t wird offenbar der gleiche Wert von s und damit von w für entsprechend vergrößerte Werte von y und x erreicht; diese liegen auf einer zu der gezeichneten parallelen Geraden, die für $t + \Delta t$ in der Normalrichtung um $c\Delta t$ fortgeschritten ist.

Für

$$s_2 = x\cos\alpha + y\sin\alpha + ct \tag{6}$$

gilt Entsprechendes, mit dem einzigen Unterschied, daß die Richtung von c gegenüber der in Abb. 2 eingetragenen umgekehrt ist.

Wenn Striche Differentiationen von $f(s)$ nach dem Argument s bedeuten, so wird

$$w_{tt} = c^2 f'', \quad \Delta\Delta w = f'''', \quad w_{xy} = \sin\alpha\cos\alpha\, f'' = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\, f'';$$

setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$$f'''' + \left(c^2 - \frac{1}{2}\vartheta\sin 2\alpha\right) f'' = 0\,. \tag{7}$$

2. Fortschreitende Wellen. Der Schubspannungswert ϑ wird hier als konstant angenommen:

$$\vartheta = \text{konst.} \tag{8}$$

Damit stellt dann (7) eine gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung für f dar, mit der allgemeinen Lösung

$$f = A + Bs + C_1\sin Ks + C_2\cos Ks \tag{9}$$

mit A, B, C_1, C_2 als Integrationskonstanten und

$$K^2 = c^2 - \frac{1}{2}\vartheta\sin 2\alpha\,. \tag{10}$$

[1] In dieser Mitteilung wird lt. Abb. 1 in Übereinstimmung mit der sonstigen Literatur τ entgegengesetzt zu der Festsetzung in den Mitteilungen I und II als positiv angenommen.

Wenn $K^2 > 0$, so sind C_1 und C_2 in (9) reell, und sin bzw. cos haben reelles Argument. Für $K^2 < 0$ treten die Hyperbelfunktionen mit reellem Argument an die Stelle der Kreisfunktionen, und C_1, C_2 sind wieder reell.

Die Hyperbelfunktionen und ebenso das lineare Glied in (9) sind hier von sekundärem Imteresse, da sie ständig wachsende Beträge von w ergeben. Daher wird die Untersuchung im wesentlichen beschränkt auf

$$f = C_1 \sin Ks + C_2 \cos Ks\,, \qquad K \geq 0\,. \tag{11}$$

Wie aus (9) hervorgeht, hat die Platte (ebenso wie der elastische Stab) die Eigenschaft, daß nur ganz bestimmte einzelne Wellenformen möglich sind, die (abgesehen von dem linearen Glied) durch den betreffenden Wert von K gekennzeichnet sind, und daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c für die verschiedenen Formen verschieden ist. Betrachtet man in (11) der Einfachheit wegen das Sinusglied, so erkennt man leicht, daß

$$K = \frac{2\pi}{l}\,, \qquad l = \frac{2\pi}{K} \tag{12}$$

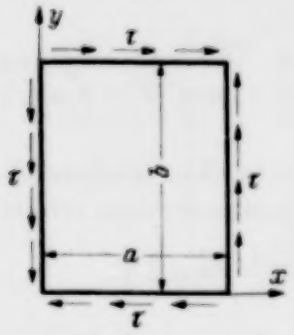


Abb. 1. Hauptbezeichnungen.

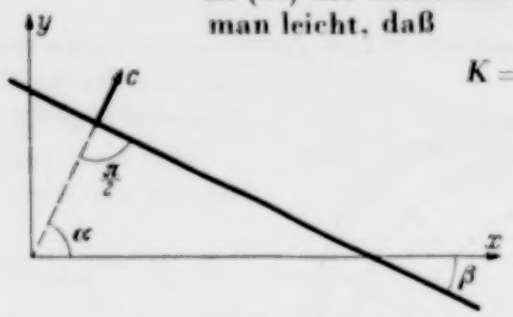


Abb. 2. Wellenfront mit Angabe der Winkel.

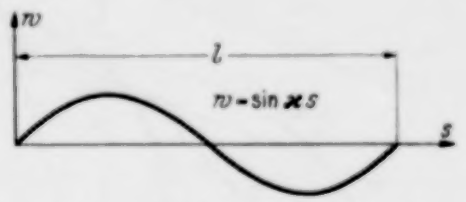


Abb. 3. Eine einfache stehende Welle.

gilt, worin l die „Wellenlänge" für eine Vollperiode bedeutet (Abb. 3).

Hiermit ergibt (10) den Zusammenhang zwischen der Wellengeschwindigkeit und der Wellenlänge durch die Gleichung

$$c^2 = \frac{4\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2}\,\vartheta \sin 2\alpha\,. \tag{13}$$

Also ist c von l abhängig; die Wellen haben Dispersion; d. h. eine Wellenform, die zur Zeit t auf einem gewissen Gebiet der Platte durch Übereinanderlagerung endlich oder unendlich vieler Partialwellen von verschiedenem K, d. h. mit verschiedener Wellenlänge, entstanden ist, kann nicht bestehen bleiben, da die verschiedenen Anteile mit verschiedenen Geschwindigkeiten weiterschreiten.

Die Verhältnisse liegen bei der Platte (und beim Stab) vollkommen anders als bei der starkgespannten Saite. Bei dieser sind beliebige Formen möglich, und c ist unabhängig von der Länge der harmonischen Partialwellen.

In dem hier untersuchten Fall der durch Schub vorbeanspruchten Platte tritt nun nach (13) ein dritter Unterschied gegenüber der Saite und ein Unterschied gegenüber dem elastischen Stab und der schubfreien Platte auf:

Die Wellengeschwindigkeit ist außerdem von der Richtung abhängig, um so stärker, je größer bei gleichem K der Schubspannungswert ϑ ist.

Die Verhältnisse werden anschaulich, wenn man beachtet, daß der Spannungszustand mit $T_{xy} = T_{yx} = 0$ in Schnitten parallel zu den Koordinatenachsen für die dazu unter 45° liegenden Schnittrichtungen Zug- bzw. Druckspannungen vom gleichen Betrage liefert, wie in Abb. 1 durch die Pfeile angedeutet. Die Druckspannungen wirken im Sinne einer Vergrößerung, die Zugspannungen im Sinne einer Verkleinerung der Auslenkungen w. Hiermit steht die Vergrößerung von c in der Zug-, die Verkleinerung in der Druckrichtung unmittelbar in Zusammenhang.

Offenbar ist stets bei Betrachtung von $c(\alpha)$

$$c^2_{max} = K^2 + \frac{1}{2}\,\vartheta, \quad c^2_{min} = K^2 - \frac{1}{2}\,\vartheta\,. \tag{14}$$

und für jedes K^2 gibt es einen kritischen Wert von ϑ

$$\vartheta_K = 2\,K^2, \tag{15}$$

für welchen

$$c_{min} = 0\,.$$

Dies ist offenbar derjenige Wert, bei welchem die Platte in Parallelstreifen unter 45° mit der Wellenfront normal zur Druckrichtung ausbeult.

Man erhält eine einfache Darstellung der Verhältnisse, wenn man z. B. die kritische Wellenlänge l_K einführt, für welche jeweils $c_{min} = 0$ wird, die Platte also gerade an der Ausbeulungsgrenze sich befindet. Unter Berücksichtigung von $K = 2\pi/l$ erhält man aus (14) für $c_{min} = 0$

$$l_k^2 = \frac{8\pi^2}{\vartheta}.$$

Hiermit erhält (13) für die Wellengeschwindigkeit die Form

$$c'^2 = (l_K/l)^2 + \sin 2\alpha,$$

wenn man mit

$$c'^2 = \frac{l_K^2}{4\pi^2} \qquad c^2 = \frac{2}{\vartheta} c^2$$

eine auf die jeweils maßgebende konstante ϑ bzw. l_K bezogene Größe einführt. Diese Darstellung hat den Nachteil, daß c' mit $\vartheta \to 0$ nach Unendlich geht.

Für eine anschauliche Kurvendarstellung ist der Wert $c \cdot l$ geeignet; man erhält

$$\gamma^2 = \frac{l^2 c^2}{4\pi^2} = 1 + \left(\frac{l}{l_K}\right)^2 \sin 2\alpha.$$

Dieser Wert ist in Abb. 4 mit γ als Radius vom Nullpunkt und α als Winkel eines Polar-Koordinatensystems aufgetragen. Für $l = 0$ ergibt sich der Kreis um den Mittelpunkt mit dem Radius Eins; für den maximal zulässigen Wert $l = l_K$ erhält man zwei Kreise vom Radius $\sqrt{1/2}$, die sich im Zentrum berühren und deren Mittelpunkte auf der mit 45° gegen die x-Achse im positiven Sinne geneigten Geraden liegen. $\gamma(\alpha)$ ist diejenige Funktion, die beim Anwachsen des Wertes ϑ von Null bis zum jeweils zulässigen Maximalwert für $(l/l_K) = 1$ die zuletzt genannten Kreise in den einen zentralen Kreis von gleichem Flächeninhalt überführt.

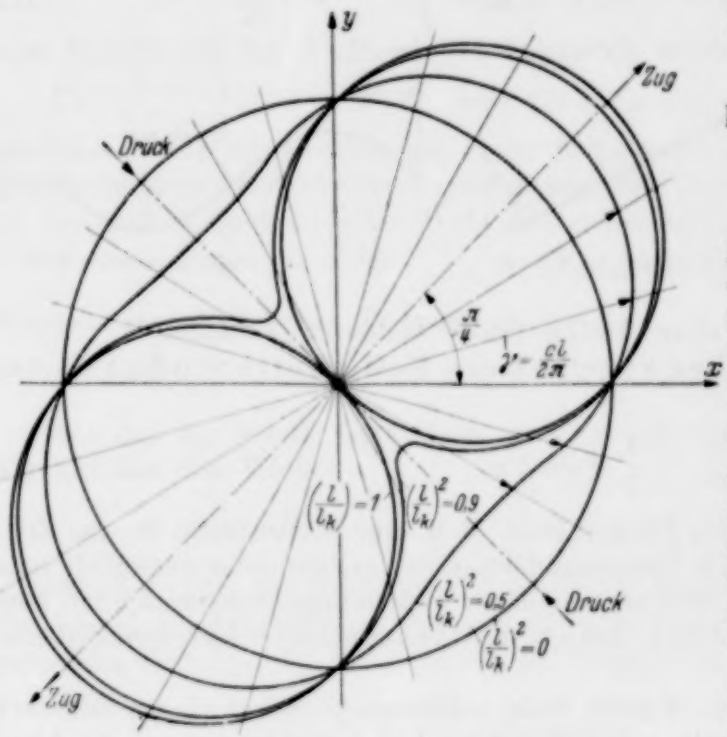


Abb. 4. Die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit vom Zentriwinkel.

3. Stehende Wellen in Parallelstreifen mit ständig ruhenden Rändern. Diese sind leicht herzustellen durch den Ansatz

$$w = \frac{1}{2} \sin K(h - ct) + \frac{1}{2} \sin K(h + ct), \tag{16}$$

worin zur Abkürzung

$$h = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$

gesetzt ist. In bekannter Weise läßt sich dies umformen zu

$$w = \sin Kh \cos Kct = \frac{2\pi h}{l} \cos \frac{2\pi c}{l} t, \tag{17}$$

das bedeutet eine stehende Schwingung in der durch $\sin Kh$ bestimmten Form mit der Kreisfrequenz

$$\omega = Kc = \frac{2\pi c}{l}. \tag{18}$$

Offenbar ist

$$w = 0 \quad \text{für alle } t$$

für $\qquad \frac{2\pi h}{l} = \pm k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$

oder für

$$y = -\operatorname{ctg}\alpha\, x \pm k\frac{l}{2\sin\alpha}. \tag{20}$$

Dies sind für die aufeinanderfolgenden Werte von k jeweils Gerade, deren Normale mit der x-Achse den Winkel α einschließt, deren Abstand $l/2$ ist und die auf der y-Achse Strecken von der Länge $l/2\sin\alpha$ abschneiden. In Abb. 5 ist dies angedeutet; in ihrem rechten Teil ist w für einen Wert von t schematisch dargestellt durch Umklappung des Diagramms in die Zeichenebene.

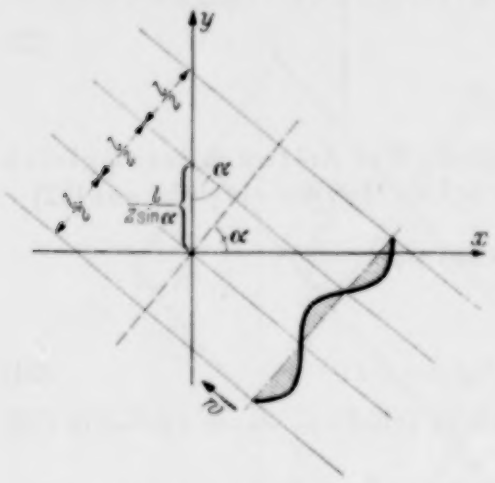


Abb. 5. Stehende Wellen in unendlich langen Parallelstreifen.

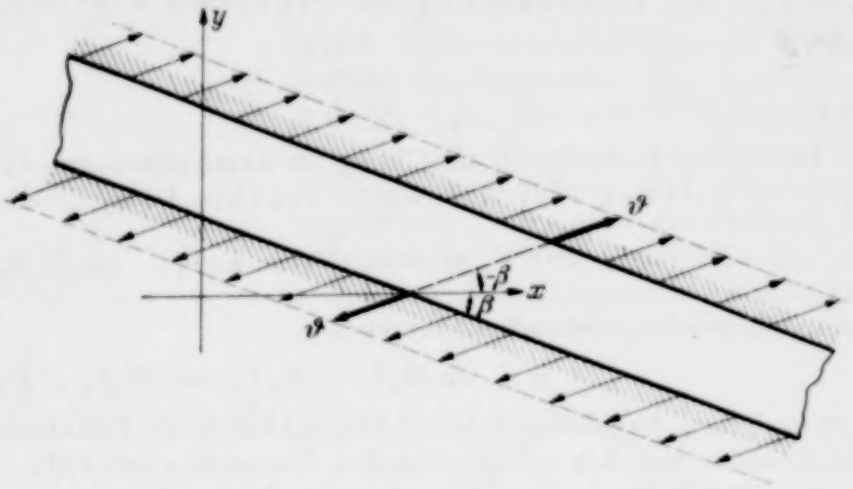


Abb. 6. Plattenstreifen mit schräger Randbelastung.

Je zwei aufeinanderfolgende Gerade $w = \sigma$ schließen einen unendlich langen Parallelstreifen von der Breite $l/2$ ein, der herausgeschnitten werden kann und in unveränderter Weise schwingt, wenn er an den Rändern entsprechend den *Navier*schen Bedingungen gelagert ist und wenn an seinen Rändern in der Plattenebene geeignete Kräfte angebracht werden.

Diese ergeben sich durch eine einfache Benutzung der Formeln für den Spannungstensor derart, daß ihr Betrag gleich ϑ ist und ihre Richtung mit der x-Achse den Winkel $-\beta$ bildet. In Abb. 6 und 7 sind zwei derartige Fälle angedeutet.

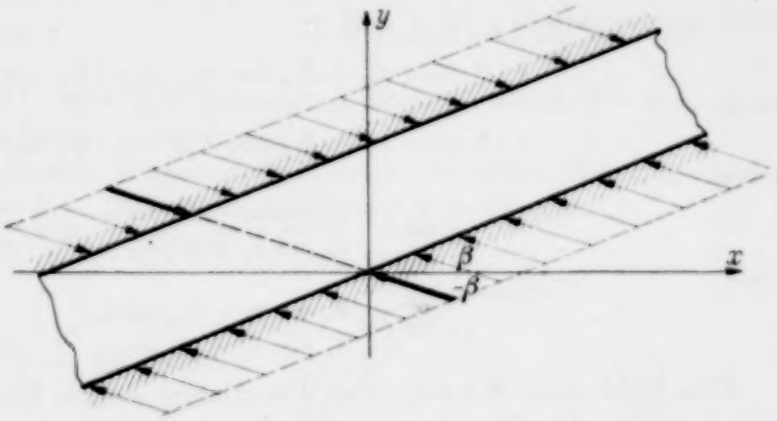


Abb. 7. Plattenstreifen mit schräger Randbelastung.

Naturgemäß können in dem Ansatz (16) oder in der daraus hervorgehenden Form (17) auch die Sinus- anstatt der Kosinusfunktionen oder umgekehrt gewählt werden (unabhängig voneinander), ohne daß im Ergebnis etwas Wesentliches geändert wird, da hierdurch die Parallelstreifen lediglich parallel zu sich gegenüber den Koordinatenachsen verschoben werden.

4. Stehende Wellen in gewissen Scharen von Parallelogrammen. Diese erhält man durch Übereinanderlagerung von zwei stehenden Wellen nach (17), deren Normalen mit der x-Achse die Winkel α_1 und α_2 bilden mögen. Mit

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1, \\ h_2 &= x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2, \\ K_1 &= \frac{2\pi}{l_1}, \quad w_1 = K_1 c_1 \frac{2\pi c_1}{l_1}, \\ K_2 &= \frac{2\pi}{l_2}, \quad \omega_2 = K_2 c_2 \frac{2\pi c_2}{l_2} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

sei angesetzt

$$w = w_1 + w_2$$

mit

$$w_1 = -\frac{1}{2}\cos K_1 h_1 \cos \omega_1 t, \qquad w_2 = \frac{1}{2}\cos K_2 \cdot h_2 \cos \omega_2 t. \tag{22}$$

Dies kann eine stehende Welle nur dann werden, wenn die zeitlichen beiden Frequenzen gleich sind; die zu wählenden Daten unterliegen also, wenn man stehende Wellen fordert, der Beschränkung

$$\left.\begin{aligned} K_1 c_1 = \frac{2\pi}{l_1} c_1 = \omega_1 = K_2 c_2 = \frac{2\pi}{l_2} c_2 = \omega^2 = \omega \\ \text{oder} \\ \frac{c_1}{l_1} = \frac{c_2}{l_2}\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Die zweite Form dieser Gleichung ist unmittelbar anschaulich: Die Zeiten müssen gleich sein, in welchen jede der Welle um ihre Länge vorrückt. Hiermit entsteht aus (22)

$$w = -\frac{1}{2}(\cos K_1 h_1 - \cos K_2 h_2)\cos \omega t,$$

was sich wieder umformen läßt zu

$$w = \sin(k_1 h_1 + K_2 h_2)\sin(K_1 h_1 - K_2 h_2)\cos \omega t\,. \tag{24}$$

Um in diesem Ergebnis die leicht übersehbaren sin-Funktionen zu erhalten, waren vorher in (22) die Kosinus mit den entsprechenden Vorzeichen gewählt.

Aus (24) ergibt sich dann sofort die Umrandung der gesuchten Parallelogramme mit

$$\left.\begin{aligned} w = 0 \\ \text{für} \\ K_1 h_1 + K_1 h_2 = \pm k_1 \pi \qquad (k_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ \text{und für} \\ K_1 h_1 - K_2 h^2 = \pm k_2 \pi \qquad (k_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

oder ausgeschrieben in x und y

$$x(K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2) + y(K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2) = k_1 \pi$$

und

$$x(K_1 \cos \alpha_1 - K_2 \cos \alpha_2) + y(K_1 \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2) = k_2 \pi$$

oder

$$\left.\begin{aligned} y = -\frac{K_1 \cos \alpha_1 + K_2 \cos \alpha_2}{K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2} x \pm \frac{\pi}{K_1 \sin \alpha_1 + K_2 \sin \alpha_2} k_1 \\ \text{und} \\ y = -\frac{K_1 \cos \alpha_1 - K_2 \cos \alpha_2}{K_1 \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2} x \pm \frac{\pi}{K_1 \sin \alpha_1 - K_2 \sin \alpha_2} k_2 \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Dies sind zwei Scharen von Parallelen, deren Winkel β_1 bzw. β_2 mit der x-Achse sich aus dem betreffenden Faktor von x ergeben und deren Abstände aus den Abschnitten auf der y-Achse folgen, die aus dem jeweils letzten Gliede in (26) abzulesen sind.

Durch einfache Rechnung erhält man für den Winkel $\beta_2 - \beta_1$ den die Geraden der einen Schar mit denjenigen der anderen einschließen, unter Einführung der Wellenlängen l_1 und l_2:

$$\operatorname{tg}(\beta_2 - \beta_1) = \frac{2 l_1 l_2}{l_2^2 - l_1^2} \sin(\alpha_2 - \alpha_1)\,. \tag{27}$$

In (26) und (27) dürfen die vorkommenden Größen nicht unabhängig voneinander gewählt werden; es besteht die Frequenzbedingung (23), in welcher c_1 und c_2 nach Gl. (13) durch l_1 bzw. l_2 ersetzt werden können. Man erhält so die Gleichung zwischen l_1, l_2, α_1, α_2 zu

$$\frac{1}{l_2^4} + \frac{\vartheta \sin 2\alpha_2}{8\pi^2} \cdot \frac{1}{l_2^2} = \frac{1}{l_1^4} + \frac{\vartheta \sin 2\alpha_1}{8\pi^2} \frac{1}{l_1^2}\,, \tag{28}$$

wobei dann

$$\left.\begin{aligned} c_1^2 = \frac{4\pi^2}{l_1^2} + \frac{1}{2}\vartheta \sin 2\alpha_1\,, \\ \text{und} \\ c_2^2 = \frac{4\pi^2}{l_2^2} + \frac{1}{2}\vartheta \sin 2\alpha_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Die Lösungen sind nur periodisch für reelle c, also für

$$c_1^2 \geq 0 \quad \text{und} \quad c_2^2 \geq 0 \,. \tag{30}$$

Man kann dies mit (28) in einer übersichtlichen Form zusammenfassen, etwa durch

$$\frac{1}{l_2^4}\left(1 + \frac{\vartheta \sin 2\alpha_2}{8\pi^2} l_2^2\right) = \frac{1}{l_1^4}\left(1 + \frac{\vartheta \sin 2\alpha_1}{8\pi^2} l_1^2\right) > 0 \,. \tag{28a}$$

Jetzt kann man beurteilen, für welche Parallelogramme die Lösung der Schwingungsgleichung (1) durch den einfachen Produktenansatz (24) gegeben wird. In diesen sind offenbar die Wellenfronten die Diagonalen, $\beta_2 - \beta_1$ der eine, $\pi - (\beta_2 - \beta_1)$ der andere Eckenwinkel und $\alpha_2 - \alpha_1$ der eine der Diagonalenwinkel. In Abb. 8 ist dies schematisch angegeben; hierin sind die Fronten der erzeugenden Wellen gestrichelt, die entstehenden Parallelogramme stark ausgezogen. Die Parallelogrammseiten ver-

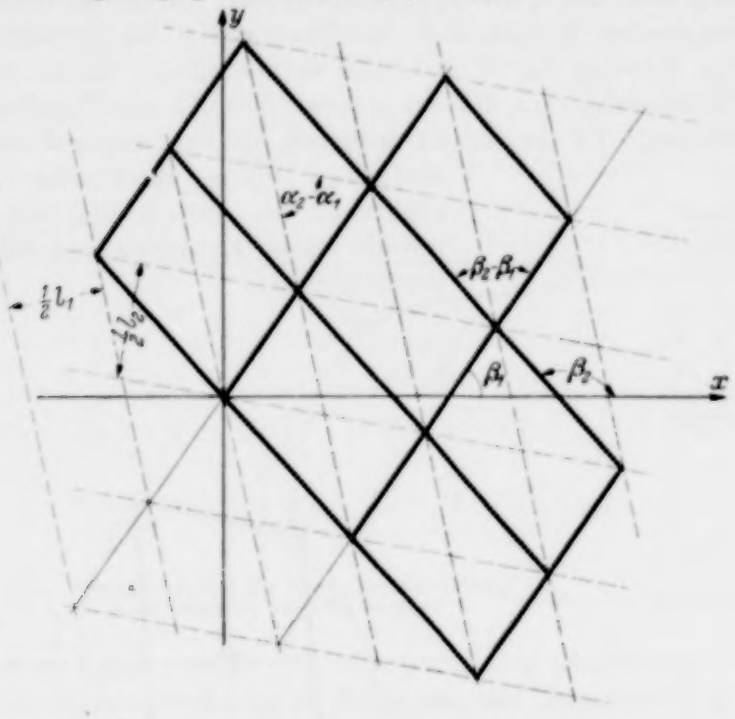


Abb. 8. Parallelogramme für stehende Wellen.

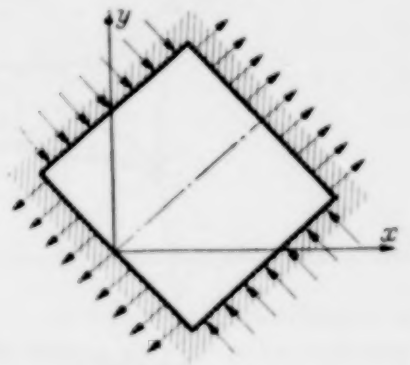


Abb. 9. Quadrat unter Zug und Druck.

binden Schnittpunkte der im Abstande $l_1/2$ bzw. $l_2/2$ gezogenen Wellenfronten für $w = 0$. In der Abbildung ist auf (28) noch keine Rücksicht genommen.

Es seien nun einige interessant erscheinende Fragen aufgeworfen. Gehören Rechtecke zu diesen Parallelogrammen? Hierfür müßte $\beta_2 - \beta_1 = \pi/2$, $\operatorname{tg}(\beta_2 - \beta_1) = \infty$ sein.

Nach (27) ist dies nur möglich für $l_2^2 = l_1^2$; Gleichung (28) liefert dann bei $c^2 \neq 0$

$$\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 \,.$$

Bei der Deutung dieser einfachen Gleichung ist zu beachten, daß die Nullstelle des Sinus sich bereits beim Weiterschreiben des Argumentes um π wiederholt, während für $\sin 2\alpha \neq 0$ die Gleichung $2\alpha_1 = 2\alpha_2 \pm k\,2\pi$, $\alpha_1 = \alpha_2 \pm \pi$ folgt.

Die zweite Alternative liefert $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm\pi$; die Diagonalen der Rechtecke arten also entweder in unendlich lange Parallelstreifen aus oder in zwei aufeinanderliegende Strecken von begrenzter Länge, also Rechtecke von der Breite Null.

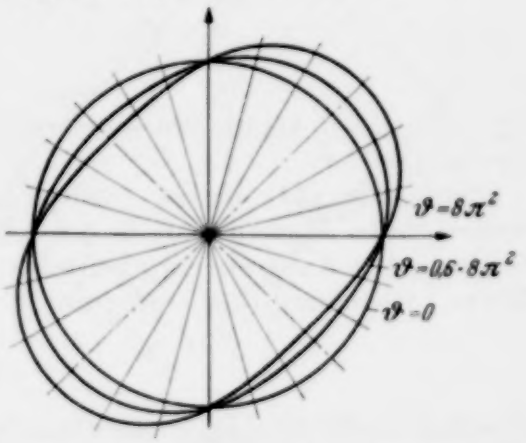


Abb. 10. Charakteristische Kurven zur Gewinnung von Parallelogrammformen.

Dagegen liefert $\sin 2\alpha_1 = \sin 2\alpha_2 = 0$, z. B. $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = \pi/2$. Die Diagonalen bilden dann ebenfalls rechte Winkel; die Rechtecke sind Quadrate. Dabei sind die erzeugenden Wellenfronten den Koordinatenachsen parallel, die Quadratseiten liegen also zu diesen unter 45°. Es handelt sich um das in Abb. 9 dargestellte Quadrat.

Andere Rechtecke gibt es bei $c^2 \neq 0$ mit dem einfachen Ansatz (24) nicht. Auf den Fall $c^2 = 0$ wird weiter unten eingegangen.

Gibt es schiefwinklige Rhomben? In diesen stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander, es ist also $\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$. Dies ist in vielfacher Weise zu realisieren; schiefwinklige Rhomben sind möglich.

Für einen allgemeinen Überblick über die in der angegebenen Weise erhältlichen Parallelogramme ist von (28) auszugehen. Dies besagt, daß sich solche Wellenzüge zu stehenden Schwingungen superponieren lassen, bei denen der Wert

$$\frac{1}{l^4} + \frac{\vartheta}{8\pi^2} \sin 2\alpha \frac{1}{l^2} = C \geq 0 \tag{31}$$

einen für die beiden Wellenzüge konstanten Wert hat.

Bei gegebenem Wert von C ist hierdurch eine Kurve $l(\alpha)$ definiert, auf welcher die Endpunkte der vom Nullpunkt gezogenen Strecken l_1 und l_2 liegen müssen. Normal zu diesen Strecken liegen die Wellenfronten der erzeugenden Wellen, d. h. die Diagonalen der gesuchten Parallelogramme. In Abb. 10 sind derartige Kurven für $C = 1$ und verschiedene Werte von ϑ angegeben. Abb. 11 zeigt eine in dieser Weise erhaltene Rhombusform, Abb. 12 ein Parallelogramm mit zwei zur y-Achse parallelen Seiten. Es ist nicht möglich, in der angegebenen einfachen Weise Rechtecke zu erhalten, bei denen die Seiten jeweils den Koordinatenachsen parallel sind.

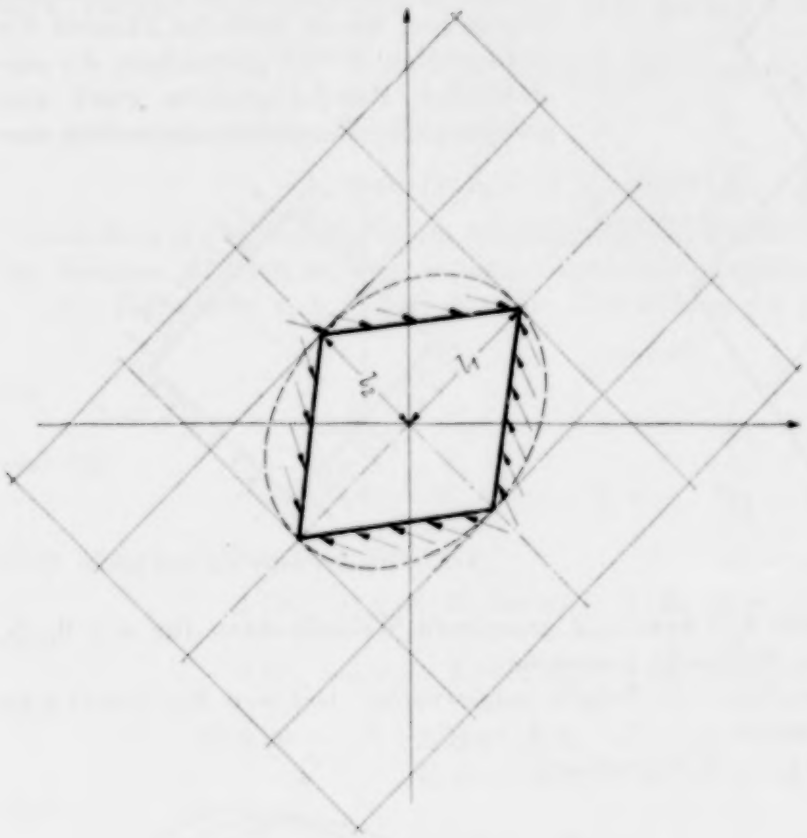


Abb. 11. Ein Rhombus mit schräger Randbelastung.

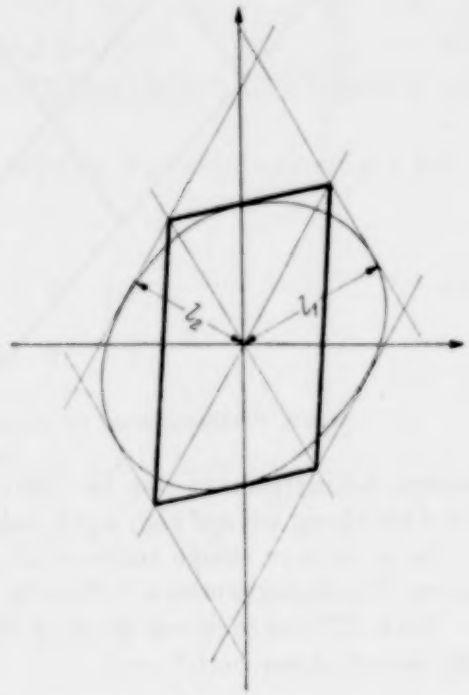


Abb. 12. Ein Parallelogramm mit zur y-Achse parallelen Seiten.

Gleichung (31) liefert reelle Figuren auch noch für $C = 0$. Die betreffenden Formen stellen dann Platten dar, die sich bei den entsprechenden Randbelastungen gerade an der Grenze der Ausbeulung befinden; die Schubspannung hat für sie gerade den kritischen Wert. Gleichung (31) ergibt mit $C = 0$ nach Multiplikation mit l^4

$$l^2 = -\frac{8\pi^2}{\vartheta} \frac{1}{\sin 2\alpha} . \tag{32}$$

Dies hat reelle Lösungen für l nur für

$$\sin 2\alpha \leq 0.$$

Die betreffende Kurve zerfällt in zwei hyperbelähnliche Zweige, die im zweiten und vierten Quadranten liegen. In Abb. 13 ist diese Kurve für $\vartheta = 8\pi^2$ dargestellt; die Abb. 14 und 15 zeigen Parallelogramme, die in dieser Weise erhalten wurden.

Wie aus Abb. 15 hervorgeht, gehören hierzu auch Rechtecke; hier liegt der Sonderfall $c^2 = 0$ vor, der früher bei der Frage der möglichen Rechtecke erwähnt wurde und für die Gleichung (31) noch andere Lösungen als Quadrate besitzt. Die jetzt erhaltenen Rechtecke liegen ebenfalls unter 45°, lassen sich aber nicht in Quadrate überführen; ihr Seitenverhältnis nähert sich bei unbegrenzt zunehmender Seitenlänge beliebig nahe der Einheit, ohne diesen Wert exakt zu erreichen.

Die der Druckspannung parallele Seite läßt sich beliebig klein machen, wie man aus der Konstruktion ohne weiteres erkennt. Es ist aber nicht möglich, daß diese Seite länger wird als die in Richtung der Zugspannung liegende; in diesem Fall kann ein Ausbeulen nicht in der vorausgesetzten Form eintreten.

Für diese Rechtecke läßt sich nun leicht die Formel für den zugehörigen kritischen Wert von ϑ aufstellen: Wenn man berücksichtigt, daß $2\,\alpha$ der Winkel zwischen l und der Diagonalen

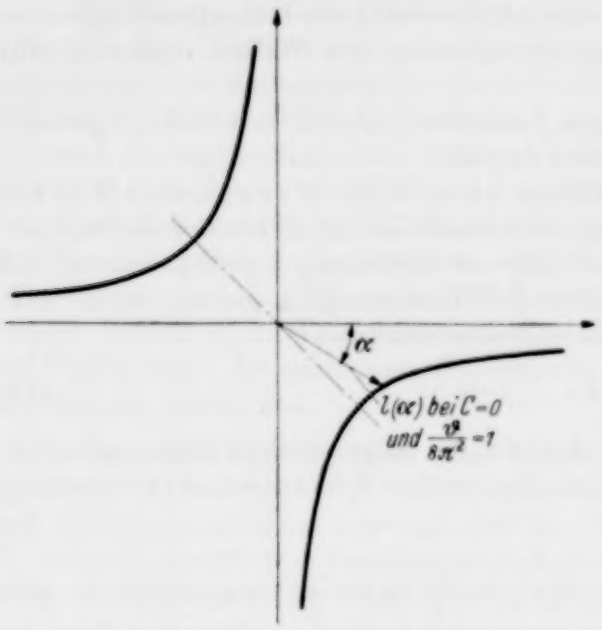


Abb. 13. Charakteristische Kurve zur Gewinnung von Plattenformen beim Ausbeulen.

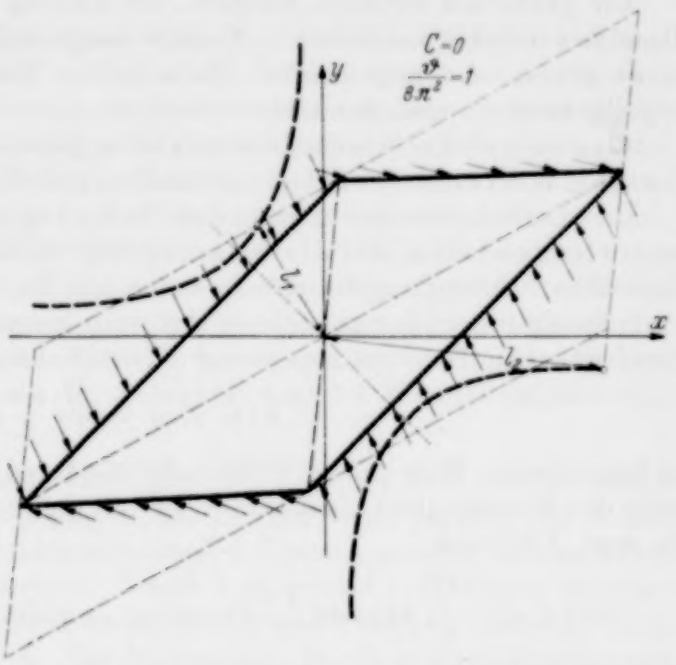


Abb. 14. Parallelogramm bei Ausbeulung durch schräge Randkräfte.

ist, so kann man in (32) durch einfache Rechnung l und $\sin 2\,\alpha$ durch die Seitenlängen a und b eliminieren, wobei a in Richtung der Zugspannung, b in Richtung der Druckspannung angenommen ist. Mit $\delta = b/a$ erhält man so

$$\vartheta_{krit} = \frac{8\,\pi^2}{a^2}\,\frac{(1+\delta^2)^2}{\delta^2(1-\delta^2)}\,. \tag{33}$$

Dies geht nach unendlich für $\delta \to 0$ und $\delta \to 1$. Man darf aber hieraus nicht den Schluß ziehen, daß die quadratische Platte unter der hier angenommenen Belastung überhaupt nicht ausbeult. Gleichung (33) und das Vorausgegangene bedeutet lediglich, daß die quadratische Platte unter dieser Belastung nicht als Ganzes, d. h. nicht ohne Knotenlinie, ausbeulen kann. Offenbar kann sie aber durch eine in Richtung der Zugspannung liegende Mittellinie in zwei Rechtecke mit der einen Seite a und der anderen $b = a/2$ unterteilt werden, für welches sich aus (33) mit $\delta = 1/2$ der tatsächliche niedrigste Wert von $\vartheta = 0$ für das Quadrat unter gleichem Zug und Druck zu

$$\vartheta_{krit} = \frac{200\,\pi^2}{3\,a^2} \tag{34}$$

ergibt.

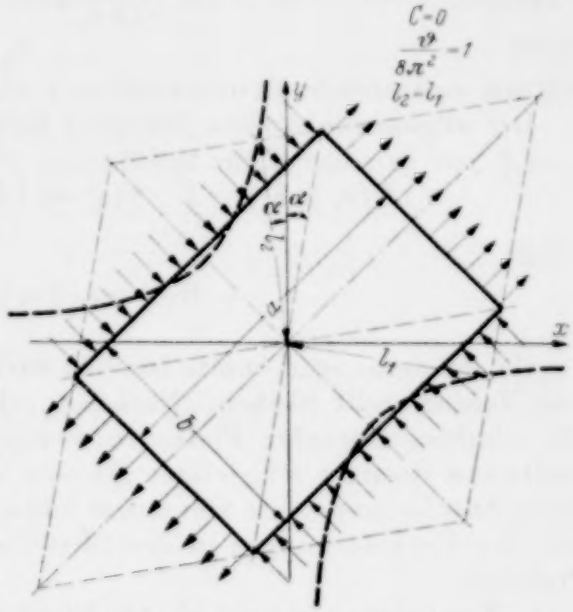


Abb. 15. Rechteck bei Ausbeulung durch Zug und Druck.

Bei der Anwendung dieser Formeln sind naturgemäß die hier benutzten Dimensionen zu beachten.

Die höheren kritischen Werte erhält man in einfacher Weise durch Unterteilung des Quadrats in mehr als zwei kongruente Rechtecke oder Quadrate.

Für die anderen aus (32) entwickelten Parallelogramme mit einfachen Ausbeulungsformen lassen sich ebenfalls die zu (33) analogen Beziehungen aufstellen, die dann naturgemäß weniger einfach ausfallen. Da es sich um elementare Umrechnungen der einfachen Grundformel (32) handelt, kann die Durchführung der Rechnung hier unterbleiben.

Es sei noch vermerkt, daß (33) für das unter 45° liegende Rechteck für beliebige, auch irrationale Seitenverhältnisse δ gilt.

5. Ein allgemeiner Ansatz für stehende Wellen. Die entwickelten Parallelogrammformen gelten nur für den einen speziellen Wert von ϑ, für den sie jeweils bestimmt wurden. Es ist nicht möglich, ihre Abmessungen und Winkel beizubehalten und ϑ zu verändern. Eine gewisse Ausnahme hiervon machen nur die für $c_{min} = 0$ angegebenen Formen, bei welchen die Winkel bei Änderung von ϑ erhalten bleiben und die Dimensionen sich so ändern, daß wieder die Ausbeulungsgrenze vorliegt.

Die praktisch wichtige Aufgabe, die Lösung für eine bestimmte festbleibende Abbildung als Rand bei beliebig veränderten Werten von ϑ zu finden, wird also durch die bisherigen Ergebnisse nicht gelöst; die angewandte Methode der Übereinanderlagerung von Wellen müßte hierfür verallgemeinert und modifiziert werden.

Als erstes sei untersucht, was sich beim gleichzeitigen Auftreten „unendlich vieler" geradliniger Wellen mit stetig verändertem Winkel α ergibt.

Diese sollen zu einer stehenden Schwingung führen, ihre Wellenlängen und Winkel unterliegen also der Bedingung (28), welche die Gleichheit bei der stehenden Wellen auftretenden Schwingungsfrequenz ausdrückt. Da in der früheren Mitteilung I gezeigt wurde, daß es Schwingungen der gesuchten Art mit harmonischer Zeitfunktion gibt, genügt es, in dem Ausdruck (17) für eine geradlinige Einzelwelle die Koordinatenfunktion

$$u(x, y, \alpha) = \sin \frac{2\pi}{l} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \tag{35}$$

zu betrachten. Eine solche Welle habe die Intensität $A(\alpha)\, d\alpha$, der Allgemeinheit wegen sei sofort noch das Kosinusglied hinzugefügt, so daß man für eine allgemeine Übereinanderlagerung zu dem Ausdruck

$$U(x, y) = \int_0^{2\pi} \left[A(\alpha) \sin \frac{2\pi}{l} (x \cdot \cos \alpha + y \sin \alpha) + B(\alpha) \cos \frac{2\pi}{l} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \right] d\alpha \tag{36}$$

gelangt. Hierin kann nun bei der Integration l nicht, wie in vielen bekannten Problemen dieser Art, konstant gehalten werden; vielmehr ist nach (31) l eine Funktion von α, für welche sich durch Auflösung von (31) nach l die Form ergibt

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{\sqrt{2\, k_1}} \sqrt{\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + k_1}} \\ \text{worin} \qquad k_1 &= l_k^2\, C \end{aligned}\right| \tag{37}$$

als neu auftretende Systemkonstante eingeführt ist.

Der allgemeine Ansatz (36) geht hiermit über in

$$\left.\begin{aligned} U(x, y, k_1) = \int_0^{2\pi} \Bigg[& A(\alpha) \sin \left(2\pi \sqrt{2\, k_1}\, \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + k_1}}} \right) \\ & + B(\alpha) \cos \left(2\pi \sqrt{2\, k_1}\, \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha + \sqrt{\sin^2 2\alpha + k^1}}} \right) \Bigg] d\alpha\,. \end{aligned}\right| \tag{38}$$

Ob ein derartiger Ansatz mit den darin auftretenden Funktionen zu einem Erfolg führt, mag hier dahingestellt bleiben. Nachdem erkannt worden ist, welche komplizierten Eigenschaften die schubbeanspruchte Platte in bezug auf die Fortpflanzung von Wellen besitzt, ist das Auftreten derartig schwieriger Formen wie (38) kaum verwunderlich; auch erklärt sich durch diese Anschauungsweise von einem anderen Gesichtspunkt der verhältnismäßig große Aufwand, den die Untersuchungen in den Mitteilungen I und II erforderten; er liegt in der Natur des Problems.

6. Zusammenfassung. Als Ergebnisse dieser Mitteilung können etwa folgende gebucht werden:

a) Die Erkenntnis über die eigentümliche Struktur der schubbeanspruchten Platte bezüglich der auf ihr möglichen Wellengebilde und ihrer Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

b) Die Gewinnung von Parallelogrammformen als einfache Lösungen für spezielle Werte der Schubbelastung und mit jeweils verschiedenen Randbelastungen.

c) Die allgemeine Ausbeulungsformel für Rechtecke unter 45° und für andere Parallelogramme mit entsprechender Randbelastung.

d) Ein Einblick in die grundsätzliche Schwierigkeit allgemeinerer Ansätze.

(Eingegangen am 12. Juni 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor *W. Kucharski*. Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 34.

Beitrag zur Berechnung der turbulenten Grenzschichten*.

Von J. Rotta.

1. Einleitung. Für die Beurteilung der Strömungsverhältnisse um einen Körper und insbesondere zur Abschätzung seines Strömungswiderstandes ist das Verhalten der an den Körper angrenzenden Strömungsschicht, die entweder laminar oder turbulent sein kann, von sehr großer Bedeutung. Während bei den laminaren Grenzschichten die physikalischen Verhältnisse geklärt und auch die mathematischen Probleme soweit durchgearbeitet sind, daß für die Praxis brauchbare Rechenverfahren zur Verfügung stehen, ist die exakte Berechnung der turbulenten Grenzschichten noch nicht möglich. Die bekannten Näherungsverfahren[1] lassen sich verbessern, wenn man beachtet, daß die kinematische Zähigkeit ν und die geometrische Beschaffenheit der Wand (Wandrauhigkeit) das Geschwindigkeitsprofil nur in einer gegen die Grenzschichtdicke δ sehr dünnen Schicht δ_w in Wandnähe beeinflussen, und daß die Strömungsgrößen im übrigen Bereich der Grenzschicht bei geeigneter Normierung als von der Zähigkeit und der Wandrauhigkeit fast unabhängig erscheinen.

2. Grenzschichtgleichungen. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf im Mittel stationäre Strömungen einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die x-Achse liege parallel zur Wand, und y sei der senkrechte Abstand von ihr. Der zweidimensionalen Grundströmung, welche durch die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitskomponenten U und V in x- und y-Richtung gebildet wird, überlagert sich die ungeordnete, zeitlich schwankende Turbulenzbewegung mit den Komponenten u, v und w, die stets dreidimensional ist. Die Integration der Grenzschichtgleichung für die ebene Wand

$$\varrho\left(U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}, \tag{2.1}$$

in welcher p den zeitlichen Mittelwert des statischen Druckes, ϱ die Dichte des Strömungsmediums und

$$\tau=\varrho\left(\nu\frac{\partial U}{\partial y}-\overline{uv}\right) \tag{2.2}$$

die zeitlich gemittelte Schubspannung in der xy-Ebene sind, führt mit Benutzung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

und den zugehörigen Randbedingungen

$$\begin{array}{llll} y=0: & U=0; & V=0; & \overline{u^2}=\overline{v^2}=\overline{w^2}=0\,. \\ y\to\delta: & U\to U_1; & \overline{u^2}\to 0; & \overline{v^2}\to 0\,, \quad \overline{w^2}\to 0 \end{array} \tag{2.4}$$

auf die bekannte Impulsgleichung

$$\frac{d}{dx}(U_1^2\delta_2)+U_1\delta_1\frac{dU_1}{\partial x}=\frac{\tau_0}{\varrho}\,. \tag{2.5}$$

Hierbei sind

$$\delta_1=\int_0^\infty\left(1-\frac{U}{U_1}\right)dy \tag{2.6}$$

die Verdrängungsdicke,

$$\delta_2=\int_0^\infty\frac{U}{U_1}\left(1-\frac{U}{U_1}\right)dy \tag{2.7}$$

* Eine ausführlichere Darstellung findet sich in: *J. Rotta*, Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten. Mitteilungen aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Nr. 1. Göttingen 1950.

[1] *E. Gruschwitz*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 321. — *A. Kehl*, Ing.-Arch. 13 (1943), S. 293. — *A. E. v. Doenhoff, N. Tetervin*, Determination of General Relations for the Behavior of Turbulent Boundary Layers. NACA-Report No. 772 (1943).

die Impulsverlustdicke, U_1 die am Außenrand vorgegebene Geschwindigkeit und τ_0 die Wandschubsspannung.

Der in (2.2) auftretende zeitliche Mittelwert des Produktes $\overline{u\,v}$ der zueinander senkrecht wirkenden Schwankungskomponenten ist als weitere, bei laminarer Strömung nicht auftretende Unbekannte anzusehen. Man muß sich nun nach weiteren Beziehungen umsehen, die den Zusammenhang zwischen dieser Unbekannten $u\,v$ und den übrigen Strömungsgrößen vermitteln. Eine solche Beziehung ist z. B. die Bilanz des zeitlichen Mittelwertes der auf die Masseneinheit bezogenen kinetischen Turbulenzenergie

$$E = \frac{\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}}{2}, \tag{2,8}$$

worin Überstreichungen wieder zeitliche Mittelung bedeuten. Nach einer solchen Bilanz, die erstmalig von L. *Prandtl*[1] angegeben wurde, ist die in der Zeiteinheit erfolgende totale (substantielle) Änderung der Turbulenzenergie gleich der Differenz zwischen der der Grundströmung entnommenen Energie (Arbeit der gemittelten Spannungen) und der durch Reibung in Wärme umgesetzten Energie (Dissipation S) einschließlich der mit benachbarten Orten ausgetauschten Energie (Energiediffusion Q). Mit den bekannten Grenzschichtvereinfachungen lautet diese Energiebilanz

$$\underbrace{\varrho\left(U\frac{\partial E}{\partial x} + V\frac{\partial E}{\partial y}\right)}_{\text{Totale Änderung der Turbulenzenergie}} \quad \underbrace{= \tau\frac{\partial U}{\partial y}}_{\text{Der Grundströmung entzogene Energie}} \quad \underbrace{- \varrho S}_{\text{Dissipation}} \quad \underbrace{- \varrho\frac{\partial Q}{\partial y}}_{\text{Energiediffusion}}. \tag{2,9}$$

Hierbei ist die auf die Masseneinheit bezogene Dissipation

$$S = \nu\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + 2\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} + 2\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\right] \tag{2,10}$$

und die Energiediffusion in Richtung der y-Achse

$$Q = -\nu\left(\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y}\right) + \overline{v\left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \frac{\tilde{p}}{\varrho}\right)}. \tag{2,11}$$

Mit $\tilde{p}$ werden die zeitlichen Schwankungen des Druckes bezeichnet. Durch Integration über y läßt sich hieraus ein Energie-Integralsatz entwickeln, der die Form

$$\underbrace{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(U_1^3\delta_3) =}_{\text{Energiestromverlust der Grundströmung}} \quad \underbrace{D}_{\text{Dissipation}} \quad \underbrace{+\frac{d}{dx}\int_0^\infty U E\,dy}_{\text{Zunahme des Turbulenzenergiestromes}} \tag{2,12}$$

hat mit der Energieverlustdicke

$$\delta_3 = \int_0^\infty \frac{U}{U_1}\left[1 - \left(\frac{U}{U_1}\right)^2\right] dy \tag{2,13}$$

und der Dissipationsfunktion

$$D = \int_0^\infty S\,dy. \tag{2,14}$$

Während die Impulsgleichung (2,5) für turbulente Grenzschichten die gleiche Form wie für laminare hat, ist der Energiesatz (2,12) für das Verhalten turbulenter Grenzschichten bezeichnend. Die Energieverluste der Grundströmung werden im wesentlichen zunächst in kinetische Turbulenzenergie umgesetzt, die dann ihrerseits durch Reibung in Wärme übergeführt wird. In (2,12) kommt zum Ausdruck, daß die Umsetzung der Grundströmungsenergie in Turbulenzenergie und die Umwandlung der Turbulenzenergie in Wärme nicht am gleichen Ort stattzufinden brauchen. Läßt man die Schwankungsgeschwindigkeiten gegen Null gehen, so erhält man aus (2,12) den von *K. Wieghardt*[2] für laminare Grenzschichten angegebenen Energiesatz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(U_1^3\delta_3) = \nu\int_0^\infty \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{2,12a}$$

[1] *L. Prandtl*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Physikal. Klasse. 1945, S. 6.
[2] *K. Wieghardt*, Ing.-Arch. 16 (1948), S. 231.

3. Aufteilung der Grenzschicht in wandnahen und äußeren Teil. In Wandabständen, die klein gegen die Grenzschichtdicke δ sind, weicht die Schubspannung τ nicht merklich von der Wandschubspannung τ_0 ab, und die Strömungsverhältnisse sind hier vom Druckgefälle $\partial p/\partial x$ praktisch unabhängig. Wie man aus der Versuchserfahrung weiß, üben die Zähigkeit und die Wandrauhigkeit nur in einer an die Wand angrenzenden Schicht von der Dicke δ_w einen unmittelbaren Einfluß auf die Strömungsvorgänge aus. Ist nun diese Dicke δ_w hinreichend klein, so gibt es sicher Wandabstände y, die größer als δ_w sind, die aber andererseits doch sehr klein gegen die Grenzschichtdicke δ sind, so daß in diesem Gebiet $\delta_w \leq y \ll \delta$ ein universelles Gesetz für die Grenzschichtströmung gilt, nach welchem alle Strömungsgrößen durch nur zwei dimensionsbehaftete Größen festgelegt sind, nämlich durch die Schubspannungsgeschwindigkeit

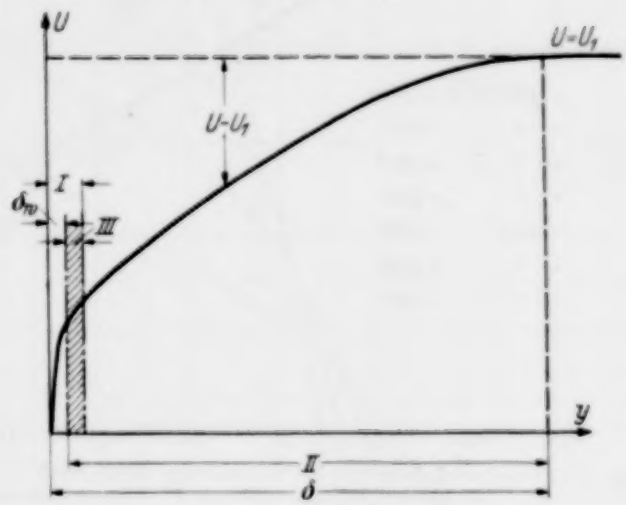
$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} \tag{3,1}$$

und den absoluten Abstand y von einer Bezugsebene, die praktisch mit der Wandoberfläche zusammenfällt. Der Geschwindigkeitsverlauf der Grundströmung ist hier durch die bekannte Beziehung[1]

$$\varkappa y \frac{\partial U}{\partial y} = v^* \tag{3,2}$$

gegeben. Darin ist $\varkappa \sim 0{,}4$ eine universelle Konstante.

Die Existenz des universellen Strömungsgesetzes im Gebiet $\delta_w \leq y \ll \delta$ ermöglicht die Zerlegung der Grenzschichtströmung in einen wandnahen Teil ($0 \leq y \ll \delta$) und einen äußeren Teil ($y > \delta_w$), Abb. 1, deren Strömungen asymptotisch in die universelle, turbulente Grenzschichtströmung übergehen; die des ersteren mit wachsendem y, die des letzteren mit abnehmendem y. Diese Aufteilung bietet den Vorteil, daß man nach Einführung des Parameters v^* die Strömungsvorgänge in jedem Teil unter Reduktion der Einflußgrößen getrennt für sich (experimentell oder theoretisch) untersuchen und beide Teile nach Bedarf zusammenfügen kann.



		Bereich	Geschwindigkeitsgesetz	abhängig von v^* und	nicht abhängig von
I	wandnaher Teil	$0 \leq y \ll \delta$	$U = v^* f\left(\frac{y\,v^*}{\nu}\right)$	ν, Wandrauhigkeit	$U_1(x)$
II	äußerer Teil	$\delta_w \leq y$	$U_1 - U = v^* F\left(\frac{y\,v^*}{\delta_1 U_1}\right)$	$U_1(x)$, (schwach von v^*/U_1)	ν, Wandrauhigkeit
III	universelles Gesetz	$\delta_w \leq y \ll \delta$	$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{v^*}{\varkappa y}$	—	ν, Wandrauhigkeit, $U_1(x)$

Abb. 1. Aufteilung der Grenzschicht in wandnahen und äußeren Teil.

Für den wandnahen Teil ($0 \leq y \ll \delta$) besteht ein Geschwindigkeitsgesetz von der Form

$$U = v^* f\left(\frac{v^* y}{\nu}\right), \tag{3,3}$$

wobei die Funktion $f(v^* y/\nu)$ im allgemeinen außer von $v^* y/\nu$ noch von der Wandrauhigkeit abhängt. Die vorliegenden experimentellen Ergebnisse an glatten und rauhen Wänden lassen sich mit Hilfe des Mischungsweganssatzes von *L. Prandtl* bis unmittelbar an die Wand verstehen und formelmäßig darstellen[2]. Hier interessiert davon nur die asymptotische Form für $y > \delta_w$, die

[1] *L. Prandtl*, Führer durch die Strömungslehre. S. 105ff. 3. Auflage. Braunschweig 1949.
[2] *J. Rotta*. Ing.-Arch. 18 (1950). S. 277.

sich aus (3.2) durch Integration ergibt:

$$U = v^* \left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + C \right). \tag{3.4}$$

Die Größe C ist eine Funktion der Wandrauhigkeit.

Der äußere Teil ($y > \delta_w$) ist von der Zähigkeit unabhängig und im wesentlichen durch zwei Funktionen festgelegt; nämlich durch die Geschwindigkeitsverteilung $U_1(x)$ am Außenrand und durch die Schubspannungsgeschwindigkeit $v^*(x)$. Während die Geschwindigkeit $U_1(x)$ im allgemeinen eine vorgegebene Funktion ist (z. B. Potentialströmung um den Körper), stellt $v^*(x)$ eine Funktion dar, die die Grenzschichtrechnung erst liefern soll. Zum Glück ist aber das Geschwindigkeitsprofil des äußeren Teiles bei geeigneter Normierung nur verhältnismäßig wenig von v^*/U_1 abhängig, wie noch gezeigt wird, so daß man die beschriebene Aufteilung der turbulenten Grenzschicht für eine rationelle Berechnung mit Erfolg anwenden kann.

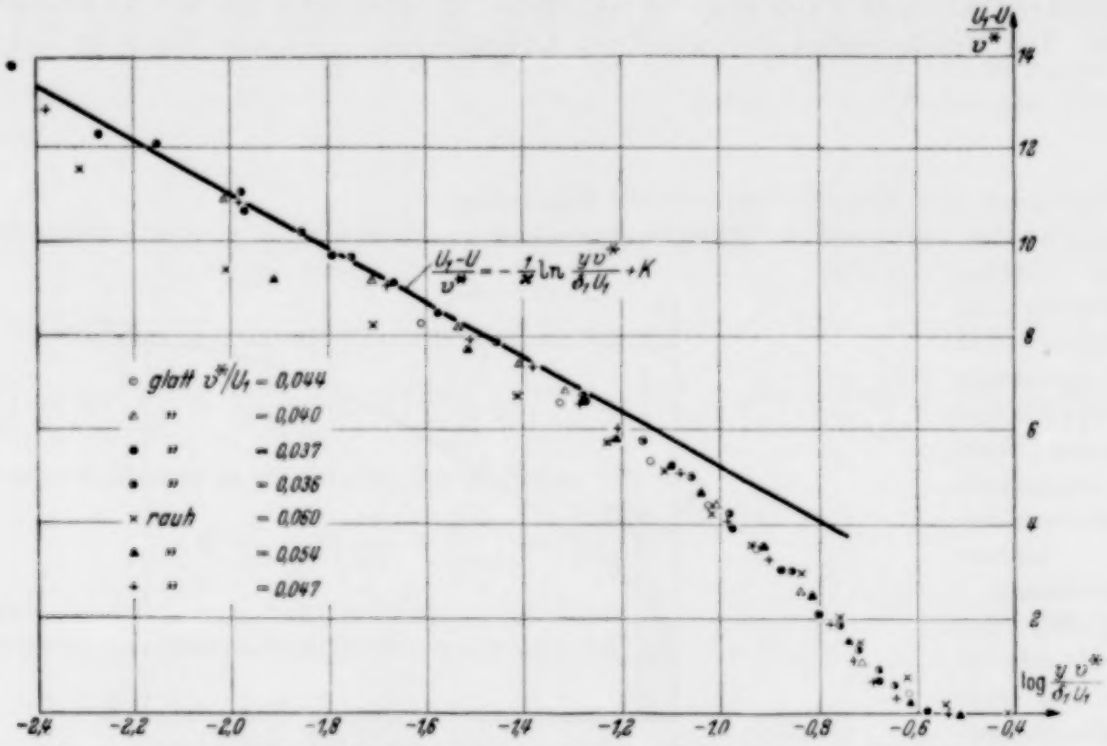


Abb. 2. Geschwindigkeitsprofile bei konstantem Druck nach Messungen von *F. Schultz-Grunow* an glatten Wänden und von *W. Tillmann* an rauhen Wänden.

Die Voraussetzungen für die Aufteilung in zwei voneinander unabhängige Bereiche sind meistens in befriedigender Weise erfüllt. Dies ist jedoch keineswegs selbstverständlich und bedarf im Einzelfall der Nachprüfung. Zu diesem Zweck sei angegeben: Die Dicke δ_w beträgt bei glatten Wänden $\delta_w \sim 40\ \nu/v^*$; bei starker Wandrauhigkeit ist δ_w durch die Abmessungen der Rauhigkeiten bestimmt. Nach den Versuchen von *J. Nikuradse*[1] an sandrauhen Rohren ist δ_w etwa gleich der Korngröße der Rauhigkeit, wobei die y-Werte von einer Bezugsebene aus gemessen werden, in der U im Mittel verschwindet. Der Wert v^*/U_1 und der örtliche Reibungsbeiwert c_f' stehen in folgender Beziehung miteinander:

$$c_f' = 2 \left(\frac{v^*}{U_1} \right)^2. \tag{3,5}$$

4. Empirische Geschwindigkeitsprofile. Um nach dem Impulssatz (2.5) und dem Energiesatz (2,12) die Grenzschicht für eine vorgegebene Geschwindigkeit $U_1(x)$ berechnen zu können, muß man entweder, wie es bei laminaren Grenzschichten geschieht, einen passenden analytischen Ansatz für das Geschwindigkeitsprofil machen, oder man muß sich die erforderlichen funktionalen Zusammenhänge aus Versuchsergebnissen ermitteln. Dieser Aufgabe wollen wir uns jetzt zuwenden. Da neuerdings Meßreihen vorliegen, bei denen die Wandschubspannung durch eine besondere Messung[2,3] bestimmt wurde, kann eine Sichtung des vorliegenden Versuchsmateriales mit größerem Erfolg betrieben werden, als es bisher möglich war.

[1] *J. Nikuradse*, Strömungsgesetze in rauhen Rohren. VDI-Forsch.-Heft 361 (1933).
[2] *H. Ludwieg*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 207.
[3] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288.

Zur Darstellung der äußeren Geschwindigkeitsprofile tragen wir den Wert $(U_1 - U)/v^*$ über $yv^*/\delta_1 U_1$ auf. Die Koordinatenmaßstäbe sind dabei so normiert, daß der Integralwert

$$\int_0^\infty \frac{U_1 - U}{v^*}\, d\left(\frac{yv^*}{\delta_1 U_1}\right) = 1$$

wird, wie der Vergleich mit (2,6) zeigt. Abb. 2 veranschaulicht eine solche Auftragung von Grenzschichtprofilen an der ebenen Platte ohne Druckgefälle[1, 2], und Abb. 3 gibt Profile bei Druckanstieg wieder[3].

Auf Grund der hydrodynamischen Differentialgleichungen läßt sich theoretisch zeigen, daß zwar bei turbulenter Rohrströmung die Geschwindigkeitsverteilung[4] $(U_1 - U)/v^*$, über y/r auf-

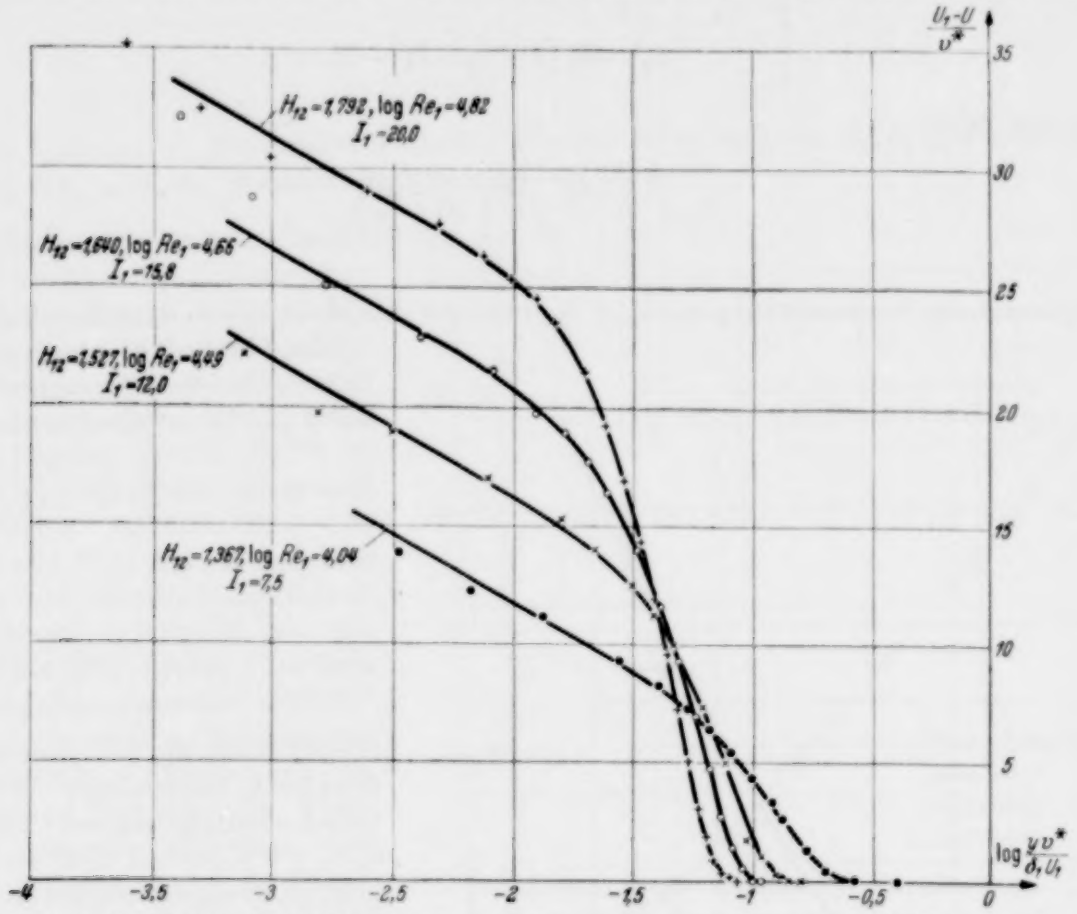


Abb. 3. Geschwindigkeitsprofile bei Druckanstieg nach Messungen von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*. $H_{12} = \delta_1/\delta_2$.

getragen, das sog. Mittengesetz, vom Verhältnis v^*/U_1 unabhängig ist, daß aber bei der Grenzschicht an der ebenen Platte ohne Druckgefälle eine Abhängigkeit von v^*/U_1 zu erwarten ist, auch wenn die Anlaufstrecke und die *Reynolds*zahl hinreichend groß sind. Die genaue Betrachtung der Abb. 2 zeigt auch tatsächlich eine solche Abhängigkeit von v^*/U; allerdings ist sie sehr gering. Nach Abb. 3 wirken sich jedenfalls Änderungen im Druckgefälle wesentlich stärker auf die Grenzschichtprofile aus.

Für den äußeren Teil des Geschwindigkeitsprofiles gilt also das allgemeine Gesetz

$$U_1 - U = v^* F\left(\frac{yv^*}{\delta_1 U_1}\right), \tag{4,1}$$

in welchem die Funktion $F(yv^*/\delta_1 U_1)$ hauptsächlich von $U_1(x)$ und in geringem Maße von v^*/U_1 abhängt. Für kleine Wandabstände $y \to \delta_w$ haben die Profile die asymptotische Form

$$U_1 - U = v^*\left(-\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{yv^*}{\delta_1 U_1} + K\right), \tag{4,2}$$

wobei die Größe K für jede Profilform einen anderen Betrag hat.

[1] *F. Schultz-Grunow*, Luftf.-Forschg. 17 (1940), S. 239.

[2] *W. Tillmann*, Untersuchungen über Besonderheiten bei turbulenten Reibungsschichten an Platten. Bericht UM 6627 Kais.-Wilh.-Inst.für Strömungsforschung. Göttingen 1945.

[3] *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 288.

[4] U_1 ist in diesem Falle die Geschwindigkeit in Rohrmitte, r der Rohrhalbmesser.

Für die Durchführung von Näherungsrechnungen genügt es, über den Zusammenhang zwischen einzelnen Kenngrößen (Verdrängungsdicke δ_1, Impulsverlustdicke δ_2 u. a.) Bescheid zu wissen. Der nächste Schritt ist nun, diese Kenngrößen in eine Form zu bringen, die es gestattet, den Einfluß der Zähigkeit und der Wandrauhigkeit getrennt zu erfassen. Für die Impulsverlustdicke δ_2 gilt nach (2,7)

$$\delta_2 = \int_0^\infty \frac{U}{U_1}\left(1-\frac{U}{U_1}\right) dy = \int_0^\infty \left(1-\frac{U}{U_1}\right) dy - \int_0^\infty \left(1-\frac{U}{U_1}\right)^2 dy\,;$$

dafür läßt sich auch schreiben

$$\delta_2 = \delta_1\left(1-\frac{v^*}{U_1} I_1\right). \tag{4,3}$$

Hierbei ist der Wert

$$I_1 = \int_0^\infty \left[\frac{U_1-U}{v^*}\right]^2 d\left(\frac{y\,v^*}{\delta_1 U_1}\right) \tag{4,4}$$

unter den gemachten Voraussetzungen ($\delta_u \ll \delta$) praktisch unabhängig von dem Geschwindigkeitsverlauf bei $y < \delta_u$. In gleicher Weise läßt sich die Energieverlustdicke nach (2,13) auf die Form

$$\delta_3 = \delta_1\left[2 - 3\frac{v^*}{U_1} I_1 + \left(\frac{v^*}{U_1}\right)^2 I_2\right] \tag{4,5}$$

bringen, wobei

$$I_2 = \int_0^\infty \left[\frac{U_1-U}{v^*}\right]^3 d\left(\frac{y\,v^*}{\delta_1 U_1}\right) \tag{4,6}$$

ebenfalls von der Profilform bei $y < \delta_u$ praktisch unabhängig ist. Da das Geschwindigkeitsgesetz für y-Werte $\delta_u \leq y \ll \delta$ sowohl (3,4) als auch (4,2) genügt, so ergibt sich durch Einsetzen von (3,4) in (4,2)

$$\frac{U_1}{v^*} = \frac{1}{\varkappa}\ln Re_1 + B\,, \tag{4,7}$$

wenn

$$Re_1 = \frac{U_1\delta_1}{\nu} \tag{4,8}$$

die mit der Verdrängungsdicke δ_1 gebildeten *Reynolds*zahl und

$$B = C + K \tag{4,9}$$

ist.

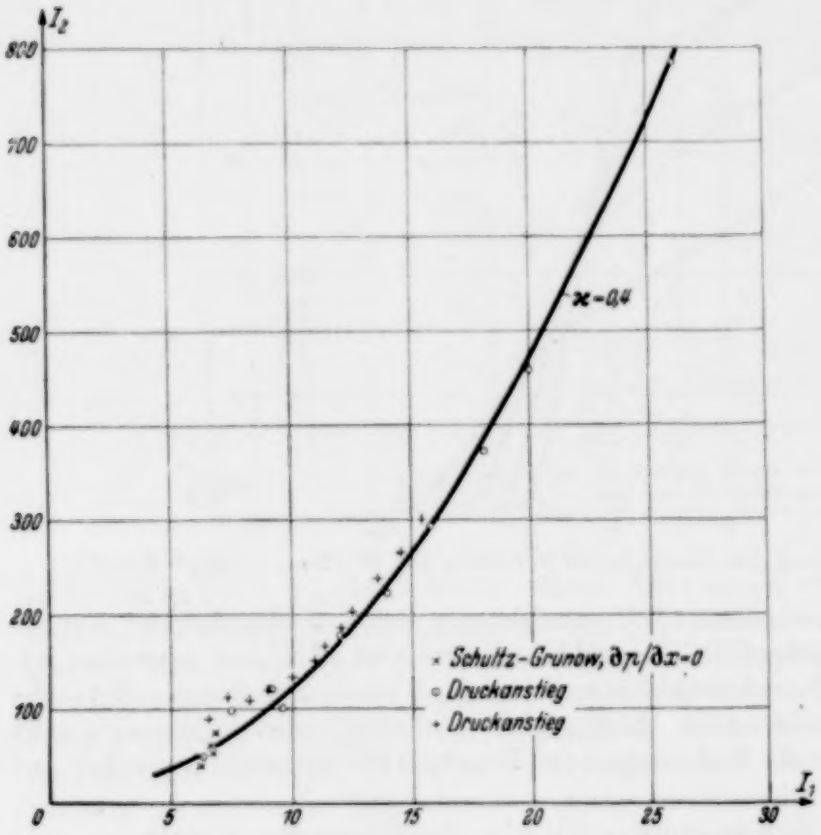


Abb. 4. Zusammenhang zwischen den Profilparametern I_1 und I_2 nach (4,11) und Versuchen.

Die Größen I_1, I_2 und K sind reine Formparameter, die ohne weiteres aus der Profilform hergeleitet werden können und nicht von der Form des Wandgesetzes (3,3) abhängen, wenn die Bedingung $\delta_u \ll \delta$ hinreichend erfüllt ist. Wir machen nun die hauptsächlich durch die geringe Abhängigkeit von v^*/U_1 gerechtfertigt erscheinende Annahme, daß zwischen diesen Größen ein eindeutiger Zusammenhang besteht, den man empirisch aus vorliegenden Messungen ermitteln kann und der in Abb. 4 und 5 dargestellt ist. Nähert man das Geschwindigkeitsprofil für $\delta \geq y \geq \delta_u$ durch den Ansatz

$$\frac{U_1-U}{v^*} = \frac{A}{\varkappa}\left(1-\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y}{\delta} \tag{4,10}$$

an, so lassen sich die Zusammenhänge zwischen I_1, I_2 und B näherungsweise durch

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{2+\frac{3}{2}A+\frac{1}{3}A^2}{\varkappa\left(1+\frac{1}{2}A\right)}, \\ I_2 &= \frac{6+\frac{21}{4}A+\frac{11}{6}A^2+\frac{1}{4}A^3}{\varkappa^2\left(1+\frac{1}{2}A\right)}, \\ B &= C+0{,}82\frac{A}{\varkappa}-\frac{1}{\varkappa}\ln\frac{1+\frac{1}{2}A}{\varkappa} \end{aligned}\right| \qquad (4{,}11)$$

beschreiben, wobei A als Parameter auftritt. Hiermit ist es möglich, δ_2, δ_3 und c_f' zu bestimmen, wenn δ_1, I_1, Re_1 und die Wandrauhigkeit gegeben sind.

5. Turbulenzenergiestrom. Um die Größe des Turbulenzenergiestromes in (2, 12) ermitteln zu können, benötigt man das „Turbulenzprofil", das ist die dimensionslose Auftragung der Turbulenzenergie E/v^{*2} über $yv^*/\delta_1 U_1$. Hierbei strebt E/v^{*2} in Wandnähe $y \to \delta_w$ einem universell gültigen Wert zu und fällt für $y < \delta_w$ sehr rasch auf Null ab. Obwohl es mit bekannten Hitzdrahtanordnungen grundsätzlich möglich ist, die quadratischen Mittelwerte aller drei Schwankungskomponenten und damit E experimentell zu bestimmen, liegen auswertbare Messungen an Grenzschichten nur für die Komponente u vor, die allerdings den wesentlichsten Beitrag zu E liefert. Die in Abb. 6 u. 7 dargestellten Längsschwankungsprofile $\sqrt{\overline{u^2}}/v^*$ wurden von *W. Tillmann*[1] gemessen. Da v^*/U_1 nach Abschnitt 4 nur mäßigen Einfluß auf das äußere Geschwindigkeitsprofil hat, so darf man auch nur einen geringen Einfluß von v^*/U_1 auf das Turbulenzprofil erwarten. Abb. 6 bestätigt diese Vermutung für die Längsschwankungsprofile der Plattenströmung ohne Druckgefälle bei glatter und rauher Oberfläche, so daß der Gedanke nahe liegt, daß sich die mit Turbulenzprofilen zusammenhängenden Größen, der Turbulenzenergiestrom und die in (2,14) definierte Dissipationsfunktion D approximativ durch einen eindeutigen Zusammenhang mit dem Formparameter I_1 beschreiben lassen.

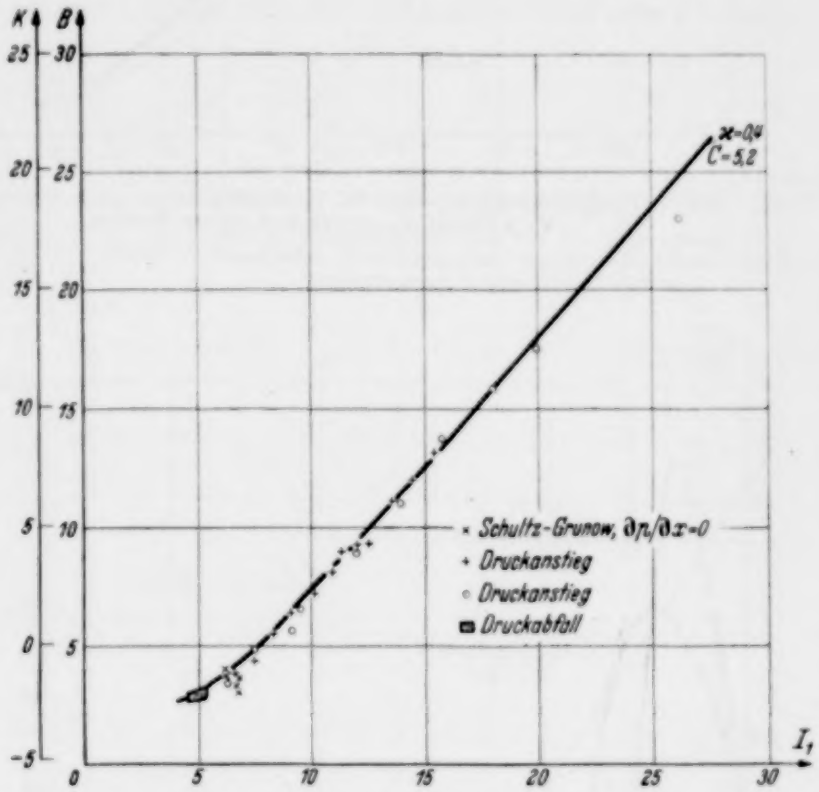


Abb. 5. Zusammenhang zwischen dem Verhältnis v^*/U_1, der *Reynoldszahl* Re_1 und dem Profilparameter I_1 nach (4,11) und Versuchen an glatten Wänden.

Die Änderung des Turbulenzenergiestromes hat bei zweidimensionaler Grenzschichtströmung, soweit bisher festgestellt werden konnte, meistens keinen sehr großen Anteil, so daß eine etwas großzügige Behandlung dieses Gliedes in (2,12) in der Regel statthaft zu sein scheint. Die Größenordnung der v- und w-Schwankungskomponenten läßt sich aus einigen älteren Messungen in Rohren und Kanälen[2] abschätzen. Nach dem vorliegenden Material kann man die Be-

[1] *W. Tillmann*, Über die Wandschubspannung turbulenter Reibungsschichten bei Druckanstieg, Diplom-Arbeit. Göttingen 1947.

[2] *H. Reichardt*, Naturwiss. 26 (1938), S. 404. — *H. C. H. Townend*, Proc. Roy. Soc. A 145 (1934), S. 180. — *A. Fage*, Philos. Mag. 7, 21 (1936), S. 80.

ziehung

$$\int_0^{\infty} U E dy \approx 0{,}65\, \delta_1\, U_1^2\, v^* \tag{5,1}$$

unabhängig von I_1 als Annäherung brauchbar annehmen.

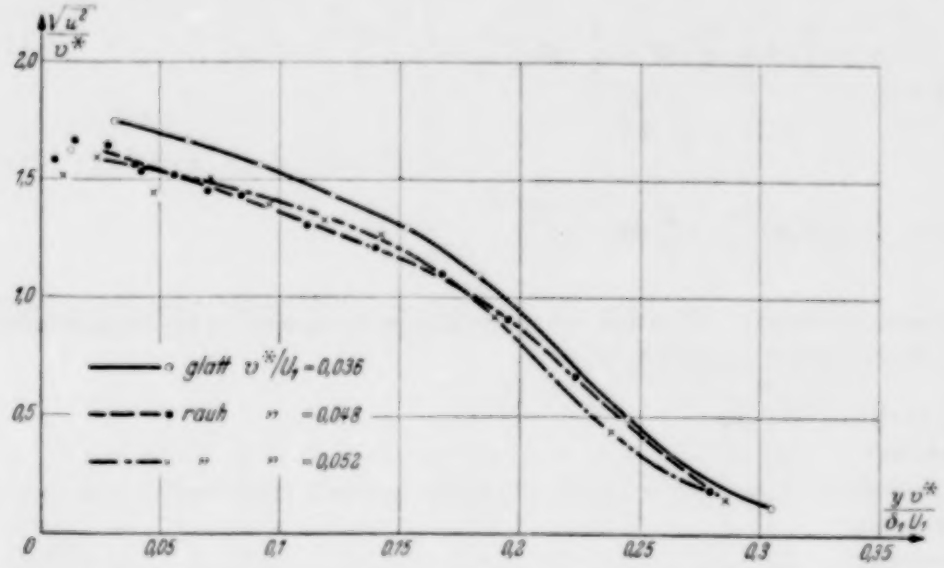


Abb. 6. Längsschwankungsprofile bei konstantem Druck nach Messungen von *W. Tillmann* an glatten und rauhen Wänden.

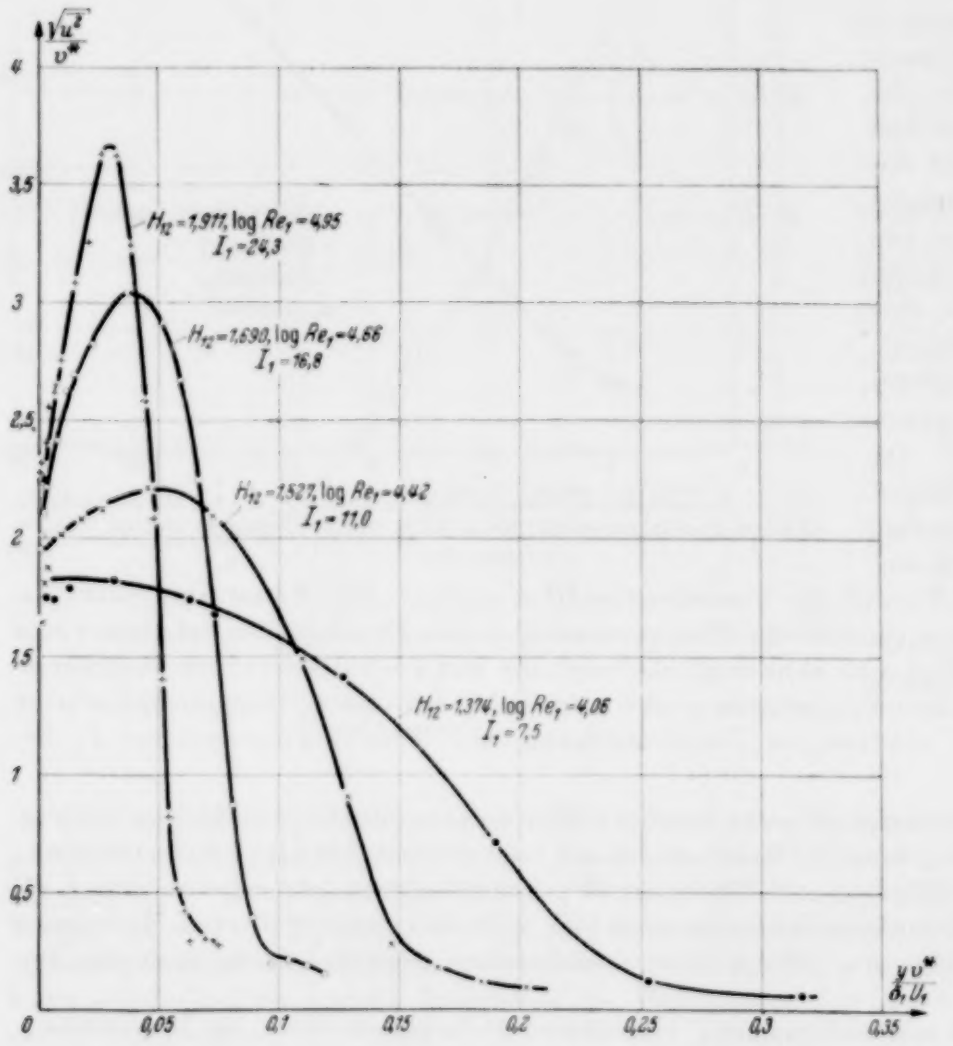


Abb. 7. Längsschwankungsprofile bei Druckanstieg nach Messungen von *W. Tillmann*.

6. Dissipationsfunktion. Zur Bestimmung der Dissipationsfunktion D nach (2, 14) wollen wir ebenfalls vermittels der im Abschnitt 3 dargelegten Ergebnisse den Einfluß der Zähigkeit und der Wandrauhigkeit für sich erfassen. Den Beitrag des wandnahen Gebietes ($0 \leq y \ll \delta$) zu (2,14) kann man leicht ausrechnen, da man hier $\tau/\varrho = v^{*2} =$ konst. setzen und die mit der Grundströmung fortgeführte Turbulenzenergie vernachlässigen darf. Die in einem Streifen von der Breite y dissipierte Energie ist dann gleich der von der Grundströmung geleisteten Arbeit zuzüglich der in diesen Streifen von außen hinein diffundierenden kinetischen Energie. Man erhält also für $y \ll \delta$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^y S\, dy' = v^{*2}\, U(y) \\ - Q(y).\end{aligned}\right\} \tag{6,1}$$

Liegt die obere Integrationsgrenze y im Gebiet der universellen Grenzschichtströmung ($\delta_w \leq y \ll \delta$), so kann man $U(y)$ nach (3,4) einführen und $Q(y)$ hat aus Gründen der für die Strömung geltenden Ähnlichkeit einen von y unabhängigen Wert $Q = - c_q\, v^{*3}$, wobei c_q eine universelle Konstante ist. Somit ergibt sich für $\delta_w \leq y \ll \delta$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^y S\, dy' = v^{*3} \\ \left(\frac{1}{\varkappa} \ln \frac{v^* y}{\nu} + C + c_q\right).\end{aligned}\right\} \tag{6,2}$$

Bei dem äußeren Grenzschichtteil ($y > \delta_w$), bei dem

die *Reynolds*zahl der Turbulenz groß ist, gilt für die Dissipation (2,10) die bekannte Beziehung[1]

$$S = c\,\frac{E^{3/2}}{l}\,, \tag{6,3}$$

in der l eine die großen Turbulenzelemente kennzeichnende Länge ist und c ein dimensionsloser Faktor, der nur von der Struktur der Turbulenz abhängt. Die Gleichung (6,3) folgt aus der Tatsache, daß die im wesentlichen in den größten Turbulenzelementen enthaltene kinetische Energie E laufend in immer kleinere Turbulenzelemente übergeführt wird und schließlich in den kleinsten Elementen in Wärme umgewandelt wird. Im Gebiet der universellen Grenzschichtströmung ist aus Ähnlichkeitsgründen l proportional zu y, und E ist konstant proportional v^{*2}. Ferner ist hier die Dissipation gleich der der Grundströmung entzogenen Energie, so daß also für $\delta_w \leq y \ll \delta$

$$S = c\,\frac{E^{3/2}}{l} = \frac{v^{*3}}{\varkappa y} \tag{6,4}$$

gilt. Damit ergibt sich dann

$$\int_{\bar{y}}^{\infty} S\,dy' = \int_{\bar{y}}^{\infty} c\,\frac{E^{3/2}}{l}\,dy' = v^{*3}\left(J_s - \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y v^*}{\delta_1 U_1}\right), \tag{6,5}$$

wobei der Wert des Integralausdrucks

$$J_s = \int_{\frac{y v^*}{\delta_1 U_1}}^{\infty} c\,\frac{(E/v^{*2})^{3/2}}{l v^*/\delta_1 U_1}\,d\left(\frac{y' v^*}{\delta_1 U_1}\right) + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y v^*}{\delta_1 U_1} \tag{6,6}$$

von der unteren Integrationsgrenze y unabhängig ist, wenn sie im Bereich $\delta_w \leq y \ll \delta$ liegt. Die Addition von (6,2) und (6,5) liefert schließlich

$$D = \int_0^{\infty} S\,dy \;\Big|\; = v^{*3}\left(\frac{1}{\varkappa}\ln Re_1 + G\right)\Big| \tag{6,7}$$

mit

$$G = C + J_s + c_q\,. \tag{6,8}$$

Da über das Verhalten der Funktionen l und c außer in der Gegend $\delta_w \leq y \ll \delta$ nichts bekannt ist, kann J_s auch bei bekanntem Turbulenzprofil nicht aus (6,6) berechnet werden. Es bleibt daher nur die Möglichkeit, durch Einsetzen der versuchsmäßig bestimmbaren Größen in die Energiegleichung (2,12) die Funktion D durch Differentiation auszurechnen, ein Verfahren, das mit einigen Unsicherheiten behaftet ist. Das in Abb. 8 dargestellte Auswertungsergebnis der Meßreihe von *F. Schultz-Grunow*[2] an der Platte

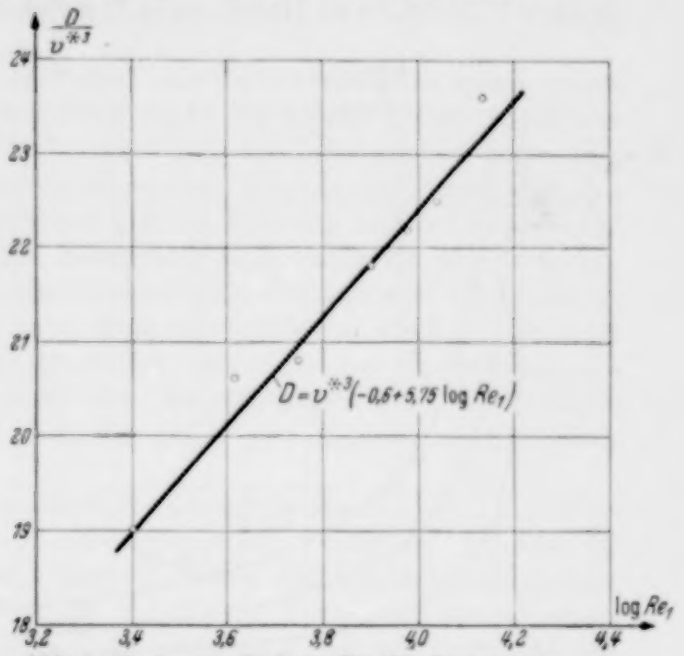


Abb. 8. Dissipationsfunktion für die Grenzschicht ohne Druckgefälle in Abhängigkeit von der *Reynolds*zahl nach Meßergebnissen von *F. Schultz-Grunow*.

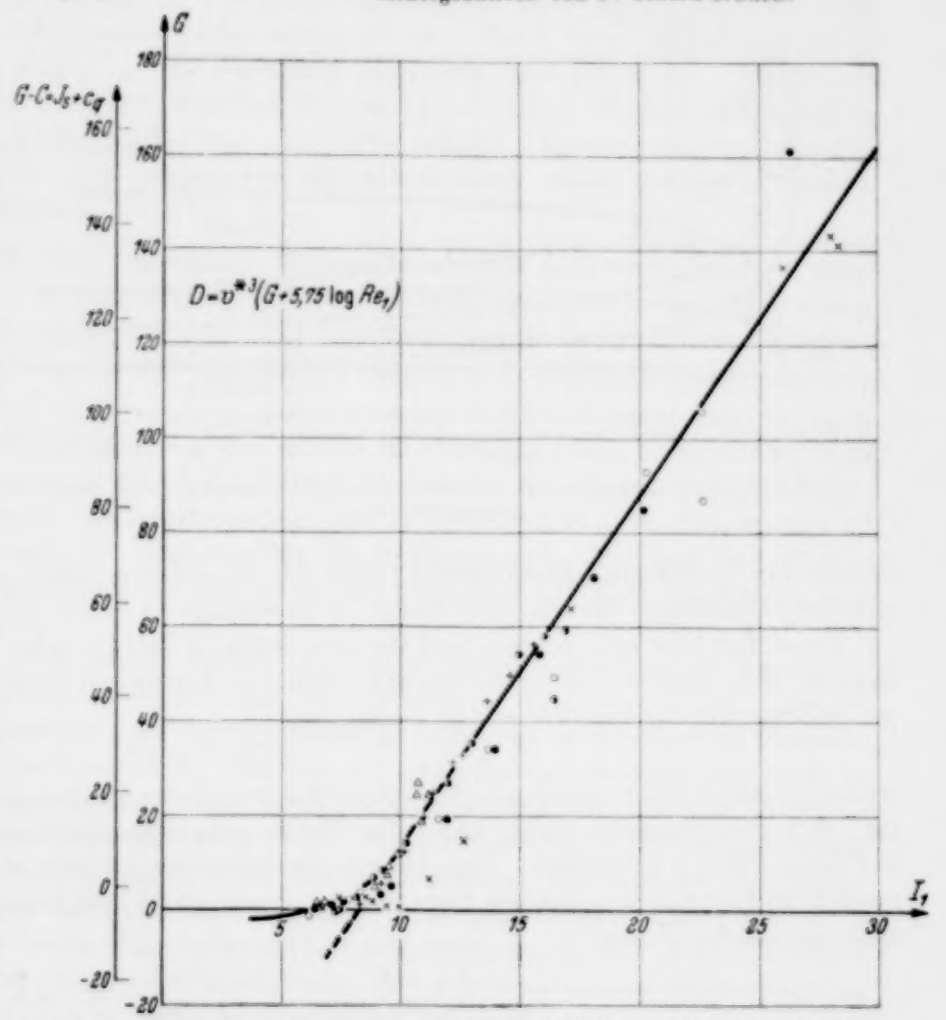


Abb. 9. Zusammenhang zwischen der Dissipationsfunktion nach (6,7), der *Reynolds*zahl Re_1 und dem Profilparameter I_1 nach Auswertung von Meßergebnissen an glatten Wänden.

[1] Vgl. Fußnote 1 von S. 32. Der Beitrag $\nu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$ der Grundströmung ist hier zu vernachlässigen.
[2] Vgl. Fußnote 1 von S. 35.

ohne Druckgefälle bestätigt die Richtigkeit der Beziehung (6,7) hinsichtlich des *Reynolds*zahleinflusses. Das Ergebnis der Auswertung mehrerer Versuchsreihen von *H. Ludwieg* und *W. Tillmann*[1] ist in Abb. 9 dargestellt und gibt den Zusammenhang zwischen der Dissipationsfunktion und den Profilparameter I_1 an. Die Streuung der Versuchspunkte ist z. T. auf die in dem Auswertungsverfahren begründeten Unsicherheiten zurückzuführen. Eine Umrechnung auf die Verhältnisse von rauhen Wänden ist an Hand von (6,8) durch Einsetzen des abgeänderten Wertes C von (3,4) möglich.

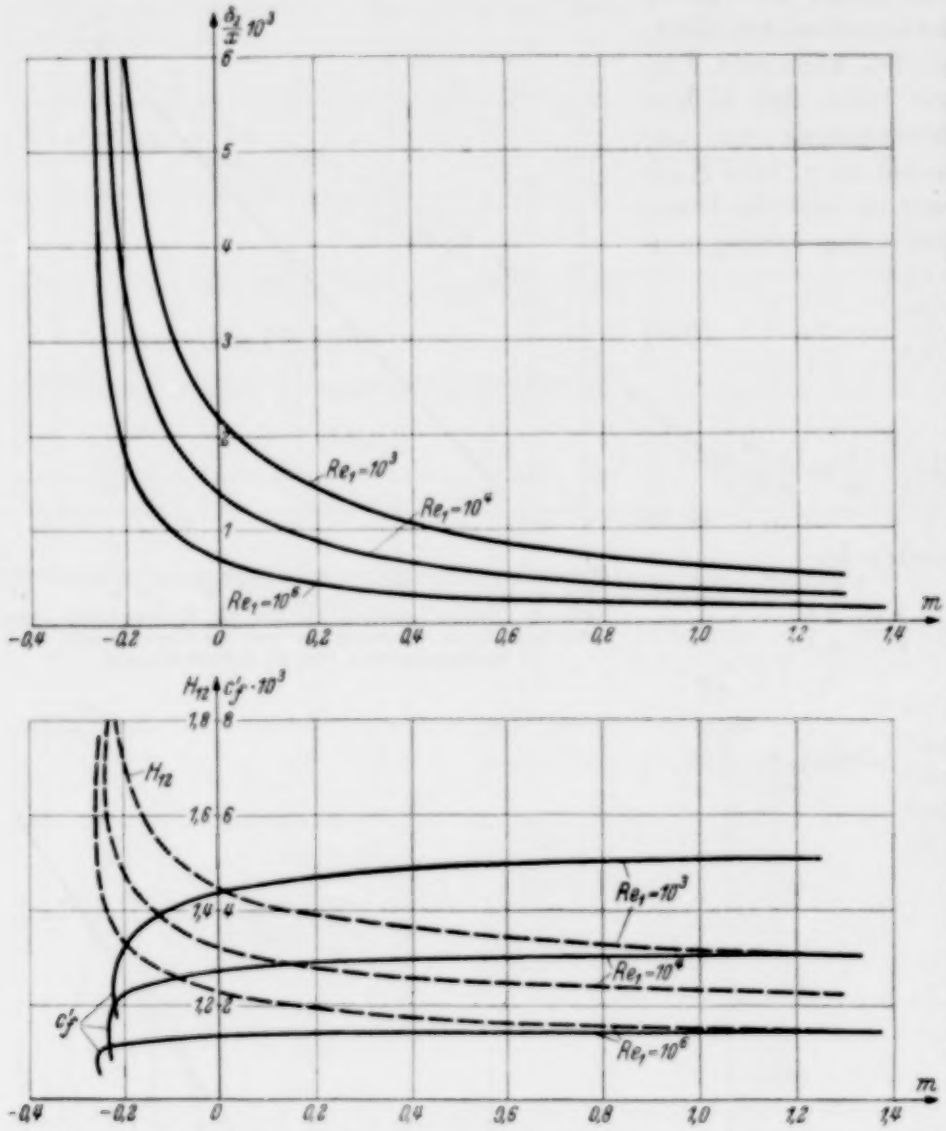


Abb. 10. Ähnliche Lösungen der Gleichungen für die turbulente Grenzschicht an glatten Wänden.

7. Ähnliche Lösungen. Für die Weiterentwicklung ist neben Versuchen zur Erhärtung der angegebenen Zusammenhänge auch die theoretische Durchdringung notwendig. Mit der Grenzschichtgleichung (2,1) und der Energiebilanz (2,9) wäre unter Hinzunahme einiger Hypothesen die Berechnung der turbulenten Grenzschicht grundsätzlich denkbar. Man hätte dabei zwei partielle, nicht lineare Differentialgleichungen anstatt einer bei der laminaren Grenzschicht zu integrieren. Daher hat man bei den turbulenten Grenzschichten auch in mathematischer Hinsicht größere Schwierigkeiten zu erwarten als bei den laminaren, bei denen die mathematischen Probleme keineswegs einfach zu nennen sind. Man wird deshalb zunächst nach einfachen Lösungstypen Ausschau halten, an denen sich verschiedene Einzelfragen studieren lassen. In diesem Zusammenhang ist es interessant, daß es unter gewissen Voraussetzungen auch bei turbulenten Grenzschichten sog. ähnliche Lösungen gibt, d. h. Lösungen, bei denen das Geschwindigkeitsprofil längs der Wand nur affin verzerrt wird; die partiellen Differenzialgleichungen lassen sich dabei in gewöhnliche verwandeln.

Zunächst läßt sich zeigen, daß für den äußeren Teil ($y > \delta_u$) unter Vernachlässigung der Zähigkeit in den Grenzschichtgleichungen ähnliche Lösungen bestehen, wenn die Geschwindigkeitsverteilung am Außenrande der Beziehung

$$U_1 = a\, x^m\,, \tag{7,1}$$

wobei a und m konstant sind, genügt und der örtliche Reibungsbeiwert $c_f' =$ konstant vorgegeben ist. Die geometrische Ähnlichkeit des Strömungsbildes bedingt, daß die Grenzschichtdicke hierbei linear mit x anwächst. Das Geschwindigkeitsprofil läßt sich als $(U_1 - U)/v^*$ über y/x darstellen und ist von den beiden Parametern m und v^*/U_1 abhängig. Für kleine y/x-Werte hat sie die asymptotische Form

$$\frac{U_1 - U}{v^*} = -\frac{1}{\varkappa} \ln\left(\frac{y}{x}\right) + K\left(m, \frac{v^*}{U_1}\right), \tag{7,2}$$

wobei sich die Konstante $K(m, v^*/U_1)$ bei gegebenen Werten m und v^*/U_1 aus den Grenzschichtgleichungen bestimmt.

[1] Vgl. Fußnote 3 von S. 34, sowie unveröffentlichte Versuchsreihen.

Die nur für Wandabstände $y \geq \delta_u$ gültige Lösung muß durch das Wandprofil (3,3) ergänzt werden, um daraus die vollständigen Geschwindigkeitsprofile zu erhalten. Die Bedingung für den stetigen Anschluß des äußeren Teiles an (3,3) erhält man durch Elimination von U/v^* in (7,2) mit Hilfe von (3,4):

$$\frac{U_1}{v^*} + \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{U_1}{v^*} - K\left(m, \frac{v^*}{U_1}\right) = \frac{1}{\varkappa} \ln \frac{U_1 x}{\nu} + C\,. \tag{7,3}$$

Die diskutierten ähnlichen Lösungen des äußeren Teiles haben nur dann reale Bedeutung, wenn die *Reynolds*zahl $U_1 x/\nu$ und die Wandrauhigkeit, deren Wirkung in der Größe C zum Ausdruck kommt, derart sind, daß (7,3) für alle x-Werte identisch erfüllt ist. Bei sehr großen *Reynolds*zahlen ist dies der Fall, wenn die die Rauhigkeit kennzeichnende Länge (z. B. Korngröße bei Sandrauhigkeit) zu x proportional ist. Bei hydrodynamisch glatten Wänden und bei konstanter Rauhigkeit, bei denen C eine Konstante ist, kann die Bedingung (7,3) nicht für alle x-Werte streng erfüllt werden. Da x in (7,3) logarithmisch auftritt, darf man für hinreichend große x-Werte den Ausdruck auf der rechten Seite von (7,3) zumindest intervallweise als konstant und somit die Bedingung für die ähnlichen Lösungen mit praktisch ausreichender Genauigkeit als erfüllt ansehen. Wichtig ist aber, und das gilt auch für die Entwicklungen der Abschnitte 4 bis 6, daß δ_u so klein ist, daß die Funktion $(U_1 - U)/v^*$ an der Stelle $y = \delta_u$ nicht merklich von der Asymptote (7,2) bzw. (4,2) abweicht.

Eine Abschätzung der ähnlichen Lösungen ist vermittels des Impulssatzes (2,5), des Energiesatzes (2,12) und der empirischen Zusammenhänge von Abschnitt 4 bis 6 möglich. In Abb. 10 sind die Ergebnisse einer solchen Rechnung zusammengestellt, wobei die Verhältnisse glatter Wände zugrundegelegt wurden. Interessant ist, daß nicht für alle m-Werte eine physikalisch sinnvolle Lösung existiert . Dies folgt aus dem Impulssatz (2,5), wenn man (7,1) einführt. Wegen $U/U_1 \leq 1$ ist nach (2,6) und (2,7) stets $\delta_1 > \delta_2$. Negative Werte von δ_2 und τ_0 können bei positivem U_1 nur auftreten, wenn sich die Strömung von der Wand ablöst. In diesem Falle sind aber die Voraussetzungen der Grenzschichttheorie nicht mehr erfüllt. Nach dem Impulssatz muß daher $m > -1/3$ sein. Die Abb. 10 zeigt, daß die Ablösung praktisch etwa bei $m = -0{,}2$ zu erwarten ist. Zum Vergleich sei daran erinnert, daß bei den entsprechenden ähnlichen Lösungen der laminaren Grenzschichten die Ablösung bei $m = -0{,}091$ erfolgt. Hierdurch wird die bekannte Erfahrungstatsache bestätigt, daß turbulente Grenzschichten einen größeren Druckanstieg als laminare überwinden können.

8. Zusammenfassung und Schluß. Die turbulente Grenzschicht läßt sich vorteilhaft in zwei Gebiete aufspalten (Abb. 1), welche in einem gemeinsamen Zwischengebiet ($\delta_u \leq y \ll \delta$) aneinander anschließen. Im äußeren Gebiet ($y \geq \delta_u$) hängt das Geschwindigkeitsprofil im wesentlichen nur von der Geschwindigkeitsverteilung U_1 am Außenrand ab und läßt sich näherungsweise als eine der Schubspannungsgeschwindigkeit $v^* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ proportionale Funktion darstellen, ist aber sonst von der Zähigkeit und den Vorgängen an der Wand unabhängig. Im wandnahen Teil ($0 \leq y \ll \delta$) ist das Geschwindigkeitsprofil durch die Zähigkeit und die Wandrauhigkeit bedingt, aber vom Geschwindigkeitsverlauf der Außenströmung nur indirekt über den Parameter v^* abhängig. Im Zwischengebiet herrscht ein universelles Strömungsgesetz, das nur von v^* abhängt, aber sowohl von der Wandrauhigkeit und Zähigkeit, als auch von der Außenströmung unbeeinlußt ist.

Unter Berücksichtigung dieser Erkenntnis liefert die Auswertung vorliegenden Versuchsmaterials empirisch die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen, die mit den angegebenen Integralsätzen für das Impuls- und Energiegleichgewicht zur angenäherten Berechnung turbulenter Grenzschichten dienen können. Ein hierauf aufgebautes Berechnungsverfahren bietet gegenüber den bisher bekannt gewordenen Verfahren den Vorteil einer zuverlässigeren Bestimmung des Reibungsbeiwertes in Abhängigkeit von der *Reynolds*zahl und dem vorgegebenen Geschwindigkeitsverlauf, sowie der Anwendbarkeit bei rauhen Wänden. Die Geschwindigkeitsprofile sind dabei zweiparametrig, da an den einparametrig vorausgesetzten äußeren Teil (4,1) je nach der vorhandenen *Reynolds*zahl ein Wandgesetz (3,3) angepaßt wird. Für die praktische Durchführung von Grenzschichtrechnungen ist es notwendig, die gegebenen Zusammenhänge in eine bequemere Darstellung zu bringen, was ohne Schwierigkeit möglich ist.

Aus dem Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Göttingen.
(Eingegangen am 1. Juli 1950.)
Anschrift des Verfassers: *J. Rotta*, (20b) Göttingen, Hann., Böttingerstraße 6.

Über die theoretische Berechnung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters*.

Von **H. Schlichting** und **N. Scholz**.

1. Übersicht. In der flugtechnischen Aerodynamik sind in den letzten beiden Jahrzehnten Verfahren zur theoretischen Berechnung des Widerstandes eines einzelnen Tragflügelprofiles entwickelt worden. Diese Verfahren werden hier erstmalig auf das Profil in Gitteranordnung, das sog. Schaufelgitter, übertragen, das ein wichtiges Bauelement jeder Strömungsmaschine bildet. Es wird damit möglich, die Strömungsverluste (Wirkungsgrad) eines Schaufelgitters in Abhängigkeit von seinen geometrischen und strömungsmechanischen Parametern (Schaufelform, Gitterteilung, Staffelungswinkel, Anstellwinkel, Umlenkungswinkel) systematisch theoretisch zu untersuchen. Die rechnerischen Grundlagen hierzu werden hier für das ebene Schaufelgitter in inkompressibler Strömung auf grenzschicht-theoretischer Grundlage entwickelt.

Für die Durchführung der Rechnung ist nacheinander für das vorgelegte Schaufelgitter zu ermitteln:

1. die potentialtheoretische Druckverteilung längs der Schaufelkontur,
2. die (laminare oder turbulente) Reibungsschicht längs der Schaufelkontur,
3. die Nachlaufströmung hinter der Schaufel.

Das im Gitter umgesetzte Druckgefälle ist von entscheidendem Einfluß auf die Ausbildung der Reibungsschicht und das Eintreten von Ablösung, und damit auf die Größe der Strömungsverluste. Beim Beschleunigungsgitter, welches Druck in Geschwindigkeit umsetzt (Turbine), bleibt die Reibungsschicht dünn, und ihre Ablösung kann meist vermieden werden, so daß die Verluste klein bleiben. Dagegen sind beim Verzögerungsgitter, welches Geschwindigkeit in Druck umsetzt (Kompressor), die Reibungsschichten wesentlich dicker. Infolgedessen ist die Ablösungsgefahr hier größer, und die Verluste nehmen erheblich zu. — Das Verfahren wird erprobt an einigen Beispielen von Beschleunigungs- und Verzögerungsgittern mit sehr dünnen Schaufeln.

2. Einleitung. Für axial durchströmte Räder von Strömungsmaschinen kann die Strömung im Laufrad und Leitrad in bekannter Weise durch ein ebenes Schaufelgitter idealisiert werden. Dieses entsteht dadurch, daß man einen koaxialen Zylinderschnitt abgewickelt denkt. Bisher sind die Strömungsverluste solcher Gitter ausschließlich empirisch ermittelt worden. Wir stellen uns nun hier die Aufgabe, die Strömungsverluste eines ebenen Gitters rein theoretisch vorauszuberechnen. Dabei legen wir für die Berechnung der Gitterströmung die tragflügeltheoretische Auffassung[1] zugrunde, bei welcher die einzelne Schaufel als ein Tragflügel aufgefaßt wird, und die gegenseitige Beeinflussung der Schaufeln eine wesentliche Rolle spielt. Die theoretische Ermittlung der Strömungsverluste eines Gitters wird bei dieser Auffassung ermöglicht durch Rechenverfahren, welche für den Einzelflügel in der flugtechnischen Aerodynamik in den letzten beiden Jahrzehnten zu großer Vollkommenheit entwickelt worden sind, aber bisher bei der Berechnung von Strömungsmaschinen noch kaum Eingang gefunden haben. Ihre Anwendung dürfte hier jedoch ebenso erfolgreich sein wie in der Flugtechnik.

Während die bisher bekannten Rechenverfahren für Gitterströmungen sich auf die Ermittlung der reibungslosen Potentialströmung beschränken und deshalb keinerlei Aussagen über auftretende Verluste machen können, wollen wir für die Gitterströmung die Flüssigkeitsreibung nach den Rechenverfahren der *Prandtl*schen Grenzschichttheorie berücksichtigen. Das bedeutet, daß wir nur in einer dünnen wandnahen Schicht Reibungskräfte annehmen, während das übrige Strömungsfeld von der reibungslosen Potentialströmung beherrscht wird. Die Berechtigung dieser Annahme für sehr große *Reynolds*sche Zahlen wird in der Grenzschichttheorie eingehend begründet und kann als allgemein bekannt gelten[2].

Rein empirisch ist seit langem bekannt, und auch physikalisch ist es plausibel, daß die Strömungsverluste im Verzögerungsgitter (Umsetzung von Geschwindigkeit in Druck, Verdichter) erheblich größer sind als im Beschleunigungsgitter (Umsetzung von Druck in Geschwindigkeit,

* Die vorliegenden Untersuchungen wurden durch die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft unterstützt.

[1] Im Gegensatz zur Auffassung der Gitterströmung als Kanalströmung.

[2] Man vgl. z. B. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, erscheint demnächst bei *G. Braun*, Karlsruhe.

Turbine). Das hier entwickelte Verfahren gibt eine rationelle Theorie für diese wichtige Erscheinung. Überdies ergibt sich bei weiterem Ausbau der Theorie die Möglichkeit, den Einfluß aller wesentlichen Parameter eines Gitters (Schaufelform, Teilungsverhältnis, Staffelung, Anstellwinkel, Umlenkungswinkel) auf die Strömungsverluste systematisch zu untersuchen. Damit wird es ermöglicht, einmal ein wichtiges Ordnungsprinzip für systematische experimentelle Untersuchungen zu geben, und zum anderen vielleicht später einmal das für einen vorgegebenen Verwendungszweck günstigste Gitter rein theoretisch vorauszubestimmen.

Die Strömungsverluste in einem Schaufelgitter entstehen zum überwiegenden Teil in den dünnen Reibungsschichten längs der Schaufelkontur. Einige weitere Energieverluste entstehen aber auch in dem Raum hinter dem Gitter. Hier bilden die Grenzschichten der einzelnen Schaufeln „Dellen" in der Geschwindigkeitsverteilung (Abb. 7). Diese Geschwindigkeitsunterschiede gleichen sich durch turbulente Vermischung stromabwärts aus, wobei ein weiterer Energieverlust auftritt.

Für die Durchführung unseres Verfahrens sind drei strömungsmechanische Teilaufgaben zu lösen:

1. Ermittlung der potentialtheoretischen Druckverteilung längs der Schaufelkontur (reibungslose Strömung);
2. Berechnung der (laminaren und turbulenten) Grenzschicht längs der Schaufelkontur;
3. Berechnung der Nachlaufströmung hinter der Schaufel.

Für die Berechnung der potentialtheoretischen Druckverteilung eines Schaufelgitters existieren grundsätzlich zwei Methoden: die konforme Abbildung und die Singularitätenmethode.

Bei der konformen Abbildung wird die Strömung um die unendliche Reihe von kongruenten Schaufeln durch eine komplexe Abbildungsfunktion auf die bekannte Kreiszylinderströmung zurückgeführt. Wesentliche Beiträge zu dieser Methode sind von *F. Weinig*[1] geliefert worden. Diese Methode, die ihrem Wesen nach ausschließlich auf das ebene Problem beschränkt ist, ist zwar nach *J. E. Garrick*[2] und *W. Traupel*[3] für beliebige Schaufelformen grundsätzlich als gelöst anzusehen. In der rechnerischen Durchführung ist sie jedoch, selbst für einfache Schaufelformen, so kompliziert, daß sie für unsere Zwecke, wo größere Reihen von Schaufelgittern zu rechnen sind, praktisch nicht in Frage kommt.

Bei der Singularitätenmethode, die grundsätzlich auch auf den dreidimensionalen Fall anwendbar ist, wird die Schaufelkontur durch Singularitäten (Wirbel, Quellen und Senken) ersetzt. Dieses Verfahren ist zuerst von *A. Betz*[4,5] für die Gitterströmung angewendet worden. Bei der einfachsten Form dieses Verfahrens wird jede Schaufel lediglich durch einen Einzelwirbel ersetzt. Der nächst bessere Ersatz ist eine stetige linienhafte Zirkulationsverteilung über die Schaufeltiefe, wobei man „unendlich dünne" gewölbte Schaufelkonturen erhält. Unter Hinzunahme von Quellen und Senkenverteilungen erhält man dann Schaufeln endlicher Dicke. Wesentliche Beiträge zu diesem Singularitätenverfahren sind von *M. Schilhansl*[6], *J. Ackeret*[7], *E. Pistolesi*[8], *V. Lieblein*[9] und *R. A. Spurr* und *H. J. Allen*[10] geliefert worden. Die Singularitätenmethode bietet die Möglichkeit, in einfacher Weise vom Einzelflügel auf die Schaufel im Gitterverband überzugehen. Da die Strömung um das Einzelprofil als gelöst angesehen werden kann[11, 12, 13, 14], ist damit bereits der in mathematischer Hinsicht schwierigste Teil der Aufgabe erledigt.

[1] *F. Weinig*, Die Strömung um Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig 1935.

[2] *J. E. Garrick*, On the plane potential flow past a lattice of arbitrary airfoils. NACA Report Nr. 788 (1944).

[3] *W. Traupel*, Die Berechnung der Potentialströmung durch Schaufelgitter. Sulzer Technische Rundschau Nr. 1 (1945).

[4] *A. Betz*, Tragflügel und hydraulische Maschinen. Handbuch der Physik. Bd. VII. Berlin 1927.

[5] *A. Betz*, Ing.-Arch. 2 (1931), S. 359.

[6] *M. Schilhansl*, Näherungsweise Berechnung von Auftrieb und Druckverteilung in Flügelgittern. Jahrbuch Wiss. Ges. Luftfahrt (1927), S. 151.

[7] *A. Ackeret*, Schweiz. Bauztg. (1942), S. 120.

[8] *E. Pistolesi*, L'Aerotechnica 17 (1937).

[9] *V. Lieblein*, Zur Berechnung der Auftriebscharakteristik eines Profils im Gitterverband. Vortrag der Braunschweiger Gittertagung 1944. Ing.-Arch. 18 (1950), S. 281.

[10] *R. A. Spurr* und *H. J. Allen*, A theory of unstaggered airfoil cascade in compressible flow. NACA Report 888 (1947).

[11] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 290.

[12] *H. Glauert*, Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Berlin: Springer 1929.

[13] *H. J. Allen*, General theory of airfoil sections having arbitrary shape of pressure distribution. NACA Report 833 (1945).

[14] *F. Riegels*, Das Umströmungsproblem bei inkompressiblen Potentialströmungen. I. Mitteilung. Ing. Arch. 16 (1948), S. 373. II. Mitteilung. Ing.-Arch. 17 (1949), S. 94.

Die Ermittlung der potentialtheoretischen Druckverteilung an der Schaufel soll im folgenden nur ganz kurz gestreift werden, da sie im Rahmen unserer Untersuchungen lediglich den Ausgangspunkt für die Berechnung der Strömungsverluste bildet. Wegen näherer Ausführungen zu diesem Punkt sei auf eine Arbeit des zweiten Verfassers[1,2] verwiesen.

Die Kenntnis der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung ermöglicht die Berechnung der Grenzschicht an der Schaufelkontur nach Methoden, die sich von den für Einzelflügel entwickelten nicht unterscheiden. Diese Grenzschichtrechnungen liefern längs der Schaufelkontur die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Reibungsschicht bzw. gewisse, das Geschwindigkeitsprofil charakterisierende Größen (Impulsverlustdicke, Wandschubspannung u.a.).

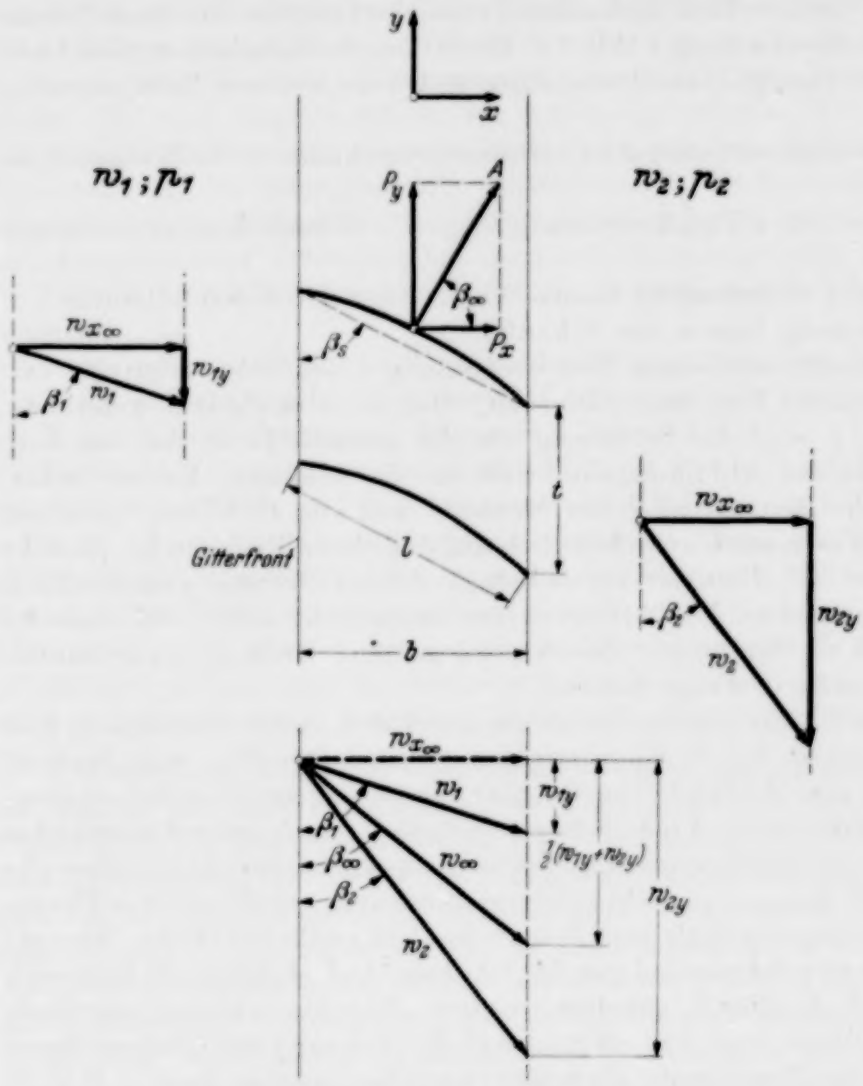


Abb. 1. Strömung durch ein ebenes Schaufelgitter.

Die Ermittlung des Widerstandes von Einzelflügeln konnte auf diese Grenzschichtgrößen an der Hinterkante des Flügels zurückgeführt werden[3,4,5]. In ähnlicher Weise kann nun auch der Widerstand der Gitterschaufel durch das Geschwindigkeitsprofil in der Reibungsschicht an der Hinterkante der Schaufel ausgedrückt werden. Die Nachlaufströmung hinter den Schaufeln wird dabei für das Gitter in gleicher Weise wie beim Einzelflügel mit Hilfe des Impulssatzes näherungsweise ermittelt. Beim unendlich langen Gitter tritt aber auch eine Änderung der Strömung sehr weit hinter dem Gitter auf, indem sich der Druck und die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung gegenüber den potentialtheoretischen Werten ändern. Diese Änderungen von Druck, Geschwindigkeitsbetrag und Geschwindigkeitsrichtung gegenüber den Werten bei reibungsloser (verlustloser) Strömung stellen die „Strömungsverluste" dar und sollen im folgenden vorausberechnet werden.

3. Kräfte und Geschwindigkeiten beim ebenen Schaufelgitter nach dem Impulssatz. Wir betrachten in diesem und dem folgenden Abschnitt die reibungslose inkompressible ebene Strömung durch ein ebenes Schaufelgitter, welches aus lauter kongruenten Schaufeln mit dem Abstand t (= Gitterteilung) besteht (Abb. 1). Die geometrischen Verhältnisse eines solchen Gitters sind gegeben durch das Teilungsverhältnis t/l (oder auch t/b), durch den Staffelungswinkel β_s und das „Schaufelprofil". Weit vor und weit hinter dem Gitter herrscht eine homogene Strömung mit den Geschwindigkeiten w_1 bzw. w_2, den Richtungen β_1, β_2 und den Drücken p_1 bzw. p_2.

[1] *N. Scholz*, Ein einfaches Singularitätenverfahren zur Erzeugung von Schaufelgittern. Vortrag GAMM 1950, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 262.

[2] *N. Scholz*, Ein Singularitätenverfahren zur Berechnung der Druckverteilung von ebenen Schaufelgittern. Unveröffentlichter Bericht d. Inst. f. Strömungsmech. der T. H. Braunschweig.

[3] *J. Pretsch*, Zur theoretischen Berechnung des Profilwiderstandes. Jb. 1938 dtsch. Luftf.-Forschg. S. I 61.

[4] *H. Helmbold*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 273.

[5] *H. B. Squire* u. *A. D. Young*, The calculation of the profile drag of aerofoils. Brit. ARC Report 1838 (1938).

Der Zweck des Schaufelgitters ist, entweder Druckenergie in Geschwindigkeitsenergie oder Geschwindigkeitsenergie in Druckenergie umzusetzen. Im ersteren Fall ist $p_2 < p_1$ und $w_2 > w_1$, und das zugehörige Gitter heißt ein Beschleunigungs- oder Turbinengitter. Wird andererseits Geschwindigkeitsenergie in Druckenergie umgesetzt ($p_2 > p_1$, $w_2 < w_1$), so liegt ein Verzögerungs- oder Pumpengitter vor. In beiden Fällen wird angestrebt, daß die Energieumsetzung mit möglichst geringen Energieverlusten vor sich gehen soll. Den Grenzfall $p_2 = p_1$ und $w_2 = w_1$ bildet das „Gleichdruckgitter", bei welchem lediglich eine Umlenkung der Strömung aber keine Energieumsetzung stattfindet. Auch diese reine Umlenkung soll mit möglichst geringen Verlusten verlaufen.

Da bei der Durchströmung des Gitters wegen der Kontinuität die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Gitterachse vor und hinter dem Gitter gleich groß ist, $w_{1x_\infty} = w_{2x_\infty} = w_{x_\infty}$, folgt, daß mit der Änderung des Geschwindkeitsbetrages beim Durchgang durch das Gitter auch stets eine Änderung der Geschwindigkeitsrichtung verbunden ist. Diese Verhältnisse sind aus dem „Geschwindigkeitsdreieck" (Abb. 1) zu ersehen.

Bei der Durchströmung des Gitters werden von der Flüssigkeit Kräfte auf die Gitterschaufeln übertragen. Für die ideale Flüssigkeit läßt sich der Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten weit vor und hinter dem Gitter und den Kräften an der Gitterschaufel in einfacher Weise aus dem Impulssatz und der *Bernoulli*schen Gleichung angeben. Für den späteren Gebrauch seien diese Beziehungen hier kurz zusammengestellt. Bedeuten P_x und P_y die x bzw. y-Komponente der Schaufelkraft (für eine Schaufel) pro Längeneinheit der Schaufel, so gilt mit den Bezeichnungen nach Abb. 1 (ϱ = Dichte)

$$P_x = \varrho t \frac{w_{1y} + w_{2y}}{2} (w_{2y} - w_{1y}). \tag{1}$$

$$P_y = -\varrho\, t\, w_{x_\infty} (w_{2y} - w_{1y}). \tag{2}$$

Unter Einführung der Zirkulation der Schaufel

$$\Gamma = t (w_{1y} - w_{2y}) \tag{3}$$

läßt sich dies schreiben in der Form

$$P_x = -\varrho \frac{w_{1y} + w_{2y}}{2} \Gamma. \tag{4}$$

$$P_y = +\varrho\, w_{x_\infty} \Gamma. \tag{5}$$

Die resultierende Schaufelkraft $A = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$, die als Auftrieb bezeichnet werden möge, ist somit (Formel von *Kutta-Joukowsky*):

$$A = \varrho w_\infty \Gamma. \tag{6}$$

Dabei bedeutet w_∞ das vektorielle Mittel der Geschwindigkeiten w_1 und w_2 (Abb. 1) mit den Komponenten w_{x_∞} und $w_{y_\infty} = \frac{(w_{1y} + w_{2y})}{2}$. Die Richtung von A ist senkrecht zur Richtung von w_∞. Zwischen den Geschwindigkeitskomponenten und den Richtungswinkeln bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} &\sin\beta_1 = \frac{w_{x_\infty}}{w_1}, \quad \sin\beta_2 = \frac{w_{x_\infty}}{w_2}, \quad \sin\beta_\infty = \frac{w_{x_\infty}}{w_\infty}, \\ &\operatorname{ctg}\beta_1 = \frac{w_{1y}}{w_{x_\infty}}, \quad \operatorname{ctg}\beta_2 = \frac{w_{2y}}{w_{x_\infty}}, \quad \operatorname{ctg}\beta_\infty = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\beta_1 + \operatorname{ctg}\beta_2). \end{aligned}\right| \tag{7}$$

Die Zirkulation nach (3) läßt sich auch schreiben

$$\Gamma = t w_{x_\infty} (\operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_1). \tag{8}$$

Führt man für die resultierende Schaufelkraft A in gleicher Weise wie beim Einzeltragflügel einen dimensionslosen Auftriebsbeiwert ein durch

$$\zeta_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2\, l}, \tag{9}$$

so gilt für diesen nach (6), (7), (8)

$$\zeta_a = 2 \frac{t}{l} \sin\beta_\infty (\operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_1). \tag{10}$$

Das im Gitter umgesetzte Druckgefälle $\Delta p = p_1 - p_2$, welches aus der *Bernoulli*schen Gleichung ermittelt werden kann, läßt sich durch die Richtungswinkel in folgender Weise ausdrücken:

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{\varrho}{2} w_{x_\infty}^2} = \frac{1}{\sin^2\beta_2} - \frac{1}{\sin^2\beta_1}. \tag{11}$$

Im Sonderfall $\beta_2 = \pi - \beta_1$ wird $p_1 = p_2$. Dies ist das sog. „Gleichdruckgitter", bei welchem lediglich eine Umlenkung der Strömung, aber keine Energieumsetzung stattfindet.

Die Formeln (4), (5) und (6) für die Schaufelkräfte sind völlig unabhängig von der individuellen Schaufelform. Sie enthalten lediglich die Geschwindigkeiten weit vor und hinter dem Gitter. Die Besonderheiten des Strömungsfeldes in der Nachbarschaft der Schaufeln, die stark durch die individuelle Schaufelform (sowie durch Teilungsverhältnis und Staffelungswinkel) bestimmt werden, gehen bei den bisherigen Betrachtungen gar nicht ein.

Das gleiche Formelsystem erhält man auch aus der *Euler*schen Turbinentheorie (Stromfadentheorie), welche mit den Begriffen der „unendlichen Schaufelzahl" und der „schaufelkongruenten" Strömung arbeitet. Auch diese Theorie vermag die Einflüsse der Schaufelform, der Teilung und des Staffelungswinkels nicht zu berücksichtigen.

Das Ziel unserer Untersuchungen ist die Ermittlung der Strömungsverluste im Gitter in Abhängigkeit von den soeben angegebenen geometrischen Größen und von dem Zuströmwinkel. Da die Strömungsverluste hauptsächlich in den Reibungsschichten an den Schaufeln entstehen, und da deren Ausbildung stark von der Druckverteilung und damit von der Schaufelform abhängig ist, ist es erforderlich, sich für die Ermittlung der potentialtheoretischen Druckverteilung ein bequemes Rechenverfahren zurecht zu legen, welches es gestattet, den Einfluß der geometrischen Parameter des Gitters in einfacher Weise zu erfassen.

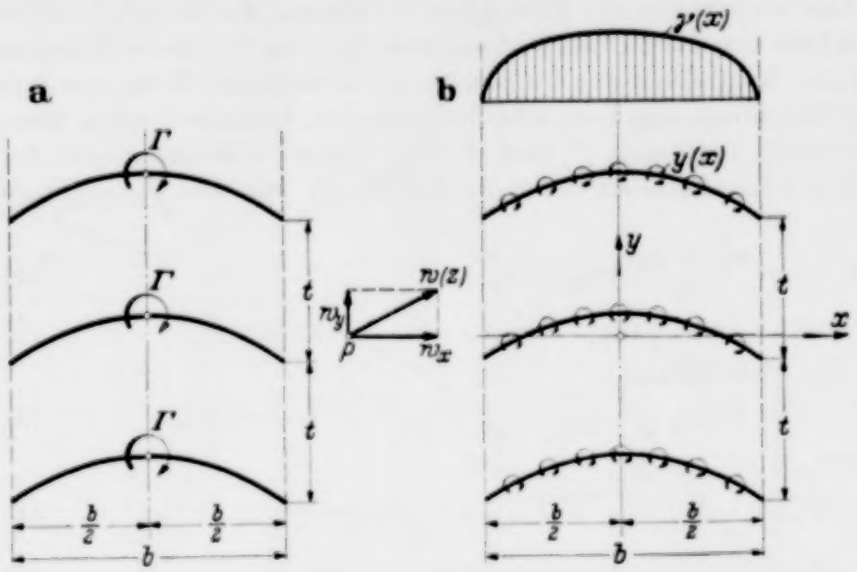


Abb. 2. Ersatz eines ebenen Schaufelgitters.
a) durch eine unendliche Reihe von Einzelwirbeln der Stärke Γ.
b) durch eine Wirbelbelegung der Zirkulationsdichte $\gamma(x)$.
$\Gamma = \int_{-b/2}^{+b/2} \gamma(x)\, dx$ = Gesamtzirkulation einer Schaufel.
$y(x)$ = Schaufelkontur; t = Gitterteilung; b = Gitterbreite.

4. Ermittlung der Druckverteilung an der Schaufelkontur. Bei Verwendung der Singularitätenmethode läßt sich ein Schaufelgitter in erster Näherung durch eine unendliche Reihe von Einzelwirbeln längs der Gitterachse ersetzen (Abb. 2a). Jeder Wirbel entspricht nach Lage und Stärke der Zirkulation einer Schaufel. Das Geschwindigkeitsfeld eines auf der y-Achse im Punkt νt gelegenen Wirbels ist gegeben durch die komplexe Geschwindigkeit $w_\nu(z) = w_x - i w_y = \dfrac{i\Gamma}{2\pi(z - i\nu t)}$. Sämtliche Wirbel der unendlichen Wirbelreihe $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$ ergeben somit das Geschwindigkeitsfeld

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi t} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\frac{z}{t} - i\nu}. \tag{12}$$

Die unendliche Summe ist die Partialbruchzerlegung des hyperbolischen Cotangens ctgh, so daß man nach Ausführung der Summation als Geschwindigkeitsfeld des Schaufelgitters mit der Teilung t hat

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{2t} \operatorname{ctgh}\left(\frac{\pi z}{t}\right). \tag{13}$$

Sehr weit vor und sehr weit hinter dem Gitter ($x = \mp\infty$) hat man wegen $\operatorname{ctgh}(\mp\infty) = \mp 1$

$$x = \mp\infty : w_{1,2y} = \pm\frac{\Gamma}{2t} \tag{14}$$

in Übereinstimmung mit (3). Die Zirkulation der Schaufeln erzeugt weit vor und weit hinter dem Gitter eine Geschwindigkeit parallel zur Gitterfront, die vor und hinter dem Gitter gleichen Betrag, aber verschiedenes Vorzeichen hat.

Das durch (13) gegebene Geschwindigkeitsfeld stellt eine brauchbare Näherung dar für mäßige und große Abstände von den Schaufeln. Am Ort des Schaufelgitters wird es jedoch unbrauchbar wegen der unendlichen Geschwindigkeiten in den Wirbelpunkten $z = \pm i\nu t$.

Eine zweite wesentlich bessere Näherung für das Geschwindigkeitsfeld des Schaufelgitters erhält man, wenn man nach der Art der *Birnbaum*schen Theorie des dünnen Einzelflügels jede Schaufel durch eine kontinuierliche Wirbelbelegung längs der Tiefe mit der Zirkulationsdichte $\gamma(x)$ ersetzt (Abb. 2b). Dabei gilt für die Gesamtzirkulation einer Schaufel

$$\Gamma = \int_{x=-b/2}^{+b/2} \gamma(x)\, dx\,. \tag{15}$$

Legt man die Wirbelbelegung auf die Geraden $y = \nu t$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), jeweils von $x = -b/2$ bis $x = +b/2$, so hat man ein ungestaffeltes Schaufelgitter ($\beta_s = \pi/2$). Durch Integration über die Schaufeltiefe erhält man in Analogie zu (13) für die komplexe Geschwindigkeit

$$w(z) = \frac{i}{2t} \int_{x'=-b/2}^{+b/2} \gamma(x') \operatorname{ctgh}\left[\frac{\pi}{t}(z - x')\right] dx'. \tag{16}[1]$$

In erster Linie interessiert die induzierte Geschwindigkeit am Ort der Schaufel selbst (Abwindverteilung), also für $z = x$. Hier wird $w(z)$ rein imaginär, somit

$$w_y(x, 0) = -\frac{1}{2t} \int_{x'=-b/2}^{+b/2} \gamma(x') \operatorname{ctgh}\left|\frac{\pi}{t}(x - x')\right| dx'. \tag{17}$$

Sehr weit vor bzw. hinter dem Gitter, wo der $\operatorname{ctgh} = \mp 1$ ist, erhält man aus (17) wegen (15) wieder das gleiche Geschwindigkeitsfeld wie bei der Einzelwirbelreihe (14). Das Geschwindigkeitsfeld nach (17) bleibt auch noch sinnvoll im Grenzübergang $t \to 0$, d. h. für unendliche Schaufelzahl, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll. Es liefert dann die „schaufelkongruente" Strömung der *Euler*schen Stromfadentheorie.

Um die Schaufelkontur zu berechnen, hat man in gleicher Weise wie beim Einzelflügel dem Geschwindigkeitsfeld der Wirbelverteilung eine Translationsströmung zu überlagern. Im einfachsten Fall (ungestaffeltes Gitter) ist diese senkrecht zur Gitterfront mit dem Betrag $w_{x\infty}$*. Die Schaufelkontur ergibt sich dann aus der kinematischen Bedingung, daß die Tangente an die Schaufelkontur parallel zur resultierenden Strömungsrichtung ist. Dies ergibt im vorliegenden Fall für die Kontur y(x) der „unendlich dünnen" Schaufel

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{Kontur} = \frac{w_y(x)}{w_{x\infty}}. \tag{18}$$

Bei den im Abschnitt 8 angegebenen Beispielen verwenden wir das Formelsystem (15) bis (18) in der Weise, daß die Zirkulationsverteilung über die Schaufeltiefe $\gamma(x)$ vorgegeben, und nach (17) die induzierte Geschwindigkeit und nach (18) die Schaufelkontur berechnet wird.

Bei der Berechnung von Beispielen hat die Ausrechnung der induzierten Abwindverteilung nach (17) numerisch zu erfolgen. Hierzu möge noch eine Bemerkung gemacht werden, die gleichzeitig den Grenzübergang zum Einzelflügel ($t \to \infty$) erkennen läßt. Bei der numerischen Auswertung von Gl. (17) ist die singuläre Stelle des Integranden bei $x' = x$ störend. Es ist zweckmäßig, diese abzuspalten in der Form

$$w_y(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{x'=-b/2}^{+b/2} \frac{\gamma(x')}{x - x'}\, dx' - \frac{1}{2t} \int_{x'=-b/2}^{+b/2} \gamma(x') \left\{\operatorname{ctgh}\left|\frac{\pi}{t}(x - x')\right| - \frac{t}{\pi(x - x')}\right\} dx'. \tag{19}$$

In (19) stellt das erste Glied die induzierte Geschwindigkeit des Einzelflügels dar, die nach der *Birnbaum-Glauert*schen Theorie bekannt ist. Das zweite Integral stellt die induzierte Geschwindigkeit aller übrigen Schaufeln dar. Deren Integrand ist jetzt bei $x = x'$ regulär, da $\{\cdots\}$ eine Potenzreihe in $\pi(x - x')/t$ darstellt, die mit dem linearen Glied beginnt. Damit ist auch das zweite Integral numerisch leicht auswertbar. Im Grenzübergang $t \to \infty$ verschwindet das zweite Integral überhaupt, so daß man dann das bekannte Ergebnis des Einzelflügels erhält.

[1] Die Wirbelbelegung wird also statt auf der Schaufelkontur auf der x-Achse angeordnet, analog zur *Birnbaum*schen Theorie des Einzelflügels. Dies entspricht einer Näherung für schwache Schaufelwölbungen und kleine Anstellwinkel (Anstellwinkel Null: stoßfreier Eintritt). Sie ist aber auch noch gut, wenn Wölbung und Anstellung zwar groß, das Teilungsverhältnis t/l aber klein ist, wie an anderer Stelle gezeigt wird (vgl. Fußnote 2 von S. 44).

* Wird auch eine Komponente $w_{y\infty}$ parallel zur Gitterfront überlagert, so bedeutet dies eine Drehung der Kontur um den Winkel $\operatorname{ctg}\beta_s = w_{y\infty}/w_{x\infty}$, wobei wir ein um den Winkel β_s gestaffeltes Gitter erhalten. Hierbei erfolgt gleichzeitig eine Längenverzerrung der Kontur, da die Breite b erhalten bleibt. Obwohl hierbei unser Formelsystem nicht mehr ohne weiteres gilt, soll in einer weiteren Veröffentlichung des zweiten Verfassers (vgl. Fußnote 2 von S. 44) gezeigt werden, daß diese Methode eine noch gute Näherung des gestaffelten Gitters für schwache Staffelungen darstellt.

Die resultierende Geschwindigkeit an der Schaufelkontur $w(x)$ erhält man aus der Überlagerung der Translationsströmung $w_{x\infty}$, $w_{y\infty}$ und der vom Wirbelfeld induzierten Geschwindigkeit w_{xi}, w_{yi} in der Form:

$$w(x) = \sqrt{(w_{x\infty} \pm w_{xi})^2 + (w_{y\infty} + w_{yi})^2} \qquad \begin{matrix} + \text{ Saugseite} \\ - \text{ Druckseite} \end{matrix}. \tag{20}$$

Dabei ist $w_{xi} = \gamma(x)/2$, während w_{yi} durch (17) gegeben ist. Für die bequeme Ermittlung von $w(x)$ ist in der in Fußnote 2 von S. 44 zitierten Arbeit ein Hodograph angegeben worden.

5. Einige grundsätzliche Betrachtungen über den Einfluß der Reibung auf die Gitterströmung. Bei der Strömung um einen jeden Körper bilden die beiden an der Hinterkante zusammenfließenden Grenzschichten hinter dem Körper eine Nachlaufströmung (auch Totwasser genannt). Bei einem Einzelkörper (im Gegensatz zum Gitter) hat in einigem Abstand hinter dem Körper der statische Druck wieder den ungestörten Wert p_∞ wie vor dem Körper. Der vom Widerstand des Körpers verursachte Energieverlust tritt hier nur noch als ein Verlust an kinetischer Energie in Erscheinung. Durch Anwendung des Impulssatzes[1] auf eine Kontrollfläche K nach Abb. 3

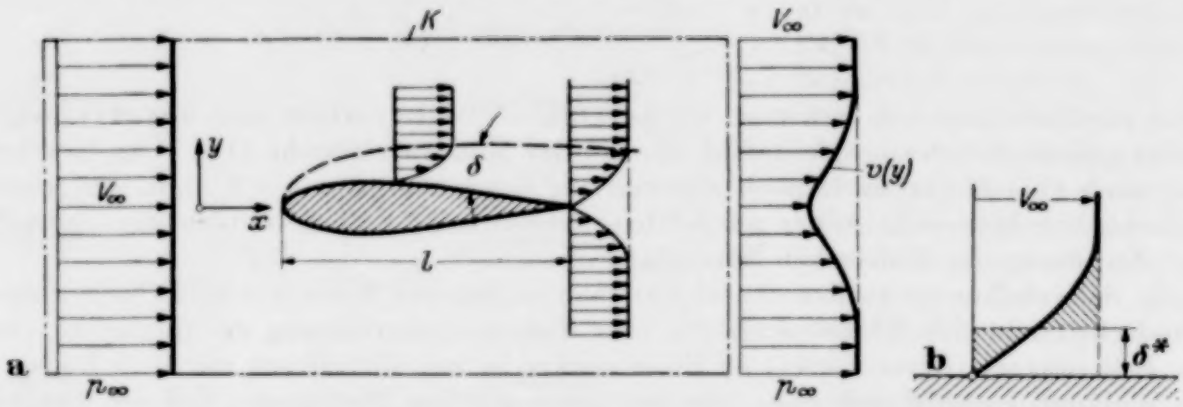


Abb. 3. a) Zur Berechnung des Widerstandes aus dem Impulsverlust im Nachlauf; K = Kontrollfläche.
b) Zur Definition der Verdrängungsdicke δ^* der Grenzschicht. Vgl. Fußnote 3, S. 49.

erhält man für den Widerstand W pro Längeneinheit des mit der Geschwindigkeit V_∞ angeströmten zylindrischen Körpers:

$$W = \varrho \int_{y=-\infty}^{+\infty} v(y)\,[V_\infty - v(y)]\,dy\,, \tag{21}$$

wo $v(y)$ die Geschwindigkeitsverteilung im Nachlauf bedeutet. Dabei ist das Integral über einen Querschnitt zu nehmen, der so weit hinter dem Körper liegt, daß dort der statische Druck den ungestörten Wert p_∞ wieder erreicht hat. Führt man den bei Tragflügelprofilen üblichen Widerstandsbeiwert ζ_w ein durch

$$W = \zeta_w\, l\, \frac{\varrho}{2} V_\infty^2\,, \tag{22}$$

sowie eine Impulsverlustdicke ϑ durch

$$V_\infty^2\, \vartheta = \int_{y=-\infty}^{+\infty} v(y)\,[V_\infty - v(y)]\,dy\,, \tag{23}$$

so läßt sich (21) auch in der abgekürzten Form schreiben

$$\zeta_w = 2\,\frac{\vartheta}{l}\,. \tag{24}$$

Der einfachste Fall einer Gitterströmung ist ein aus symmetrischen Schaufeln bestehendes Gitter, die senkrecht zur Gitterfront eingebaut sind, $\beta_s = \pi/2$, und mit einer Anströmung senkrecht zur Gitterfront (Abb. 4). In diesem Fall findet keine Ablenkung der Strömung durch das Gitter statt. In genügendem Abstand hinter dem Gitter[2] haben sich die von den einzelnen

[1] Vgl. z. B. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie. s. Zitat auf S. 42.

[2] Es sei hier vermerkt, daß der Ausgleich der Geschwindigkeitsunterschiede hinter einem Gitter sich wesentlich rascher vollzieht als hinter einem Einzelkörper. Wie aus theoretischen Rechnungen bekannt ist, ändert sich im Nachlauf (Windschatten) eines Einzelkörpers bei laminarer und turbulenter Strömung (*H. Schlichting*, Ing.-Arch. I [1930], S. 533) die Nachlaufgeschwindigkeit mit $1/\sqrt{x}$ (x = Abstand von der Hinterkante des Störkörpers), dagegen hinter einem Gitter (*R. Gran Olson*, Z. angew. Math. Mech. 16 [1936], S. 257) mit $1/x$.

Schaufeln herrührenden Geschwindigkeitsdellen ausgeglichen, so daß in einem Schnitt parallel zur Gitterfront eine gleichmäßige Geschwindigkeit w_2 vorhanden ist, die wegen der Kontinuität gleich w_1 ist. Der durch den Widerstand der Schaufeln verursachte Energieverlust tritt somit in genügend großem Abstand hinter dem Gitter ausschließlich als Druckverlust in Erscheinung:

$$\Delta p_v = p_1 - p_2.$$

Durch Anwendung des Impulssatzes auf die Kontrollfläche K ergibt sich $(p_1 - p_2)\, t = W$, wo W den Widerstand einer Schaufel pro Längeneinheit bedeutet. Hieraus folgt für den Druckverlust infolge Reibung

$$\Delta p_v = \frac{W}{t}. \tag{25}$$

Führt man anstatt W den dimensionslosen Widerstandswert nach (22) ein, wobei V_∞ durch $w_1 = w_2$ zu ersetzen ist, so hat man

$$\frac{\Delta p_v}{\frac{\varrho}{2} w_1^2} = \zeta_w \frac{l}{t}. \tag{26}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß mit abnehmendem Teilungsverhältnis t/l der auf den Staudruck der Zuströmung bezogene Reibungsdruckabfall stark zunimmt, was ja physikalisch unmittelbar einleuchtet.

Um jetzt für den allgemeineren Fall eines Gitters mit $\beta_s \neq \pi/2$ und einer beliebigen Zuströmungsrichtung das Wesentliche des Reibungseinflusses zu erhalten, betrachten wir zunächst ein gestaffeltes „Plattengitter" nach Abb. 5[1]. Die Gitterschaufeln seien unendlich dünne ebene Platten. Die Zuströmungsrichtung sei zunächst parallel zu den Platten gewählt, $\beta_1 = \beta_s$. In reibungsloser Flüssigkeit würde in diesem Fall keinerlei Beeinflussung der Strömung durch das Gitter eintreten, es gilt somit[2]

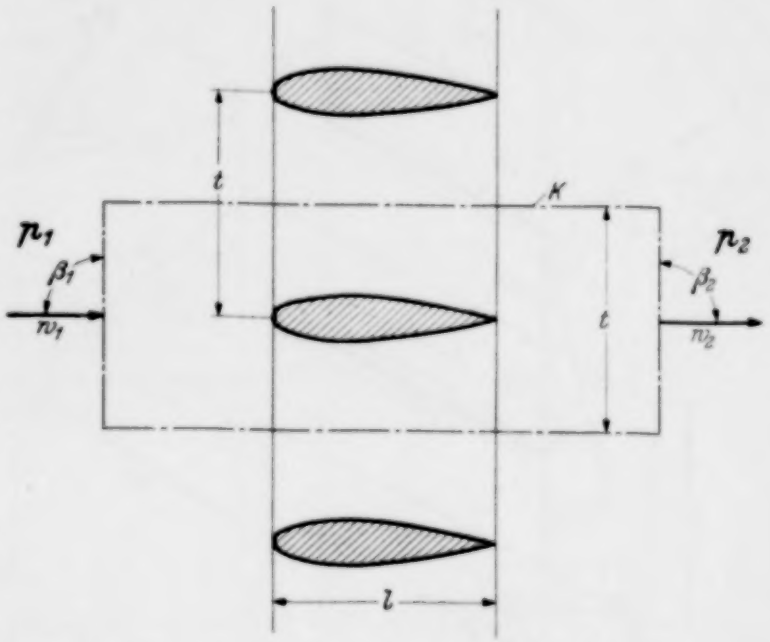


Abb. 4. Zum Reibungseinfluß bei der umlenkungsfreien Strömung durch ein ebenes Schaufelgitter. $\beta_1 = \beta_2 = 90°$; $w_1 = w_2$. Die Kontrollfläche K befindet sich „sehr weit" hinter dem Gitter, so daß dort homogene Strömung herrscht. $p_1 - p_2 = \Delta p_v > 0$ = Druckverlust infolge Reibung.

$$\beta_{2id} = \beta_1 \qquad w_{2id} = w_1 \qquad p_{2id} = p_1. \tag{27}$$

Durch den Reibungseinfluß tritt jedoch eine Änderung der Strömungsgrößen hinter dem Gitter gegenüber diesen Werten ein, die im folgenden mit Hilfe des Impulssatzes berechnet werden soll. Hierbei können wir in den Schaufelkanälen die wirkliche reibungsbehaftete Strömung durch eine gedachte reibungslose Strömung um verdickte Platten ersetzen, deren Dickenverteilung durch die Verdrängungsdicke δ^* der Grenzschicht gegeben ist[3]. Die Potentialströmung wird durch die Reibungsschicht um den Abstand δ^* von der Wand abgedrängt. In den Schaufelkanälen wird also der Reibungseinfluß lediglich durch die Verdrängungswirkung erfaßt. Nach dieser Auffassung entsteht nun an der Schaufelhinterkante für die aus den Schaufelkanälen austretende Strömung eine plötzliche Querschnittserweiterung mit einem Totwasser, welches sich stromabwärts mit der umgebenden Strömung vermischt. Die hinter den Schaufeln auftretenden Energieverluste können als Stoßverlust aus dem Impulssatz berechnet werden.

Wir betrachten jetzt die Kontrollfläche K_1 nach Abb. 5[4]. Die Geschwindigkeit w_2' in der

[1] Man vergleiche hierzu die analogen Betrachtungen von *C. Pfleiderer* (Die Kreiselpumpen. Berlin 1949) an einem Schaufelgitter mit endlich dicken Platten in reibungsloser Strömung.

[2] Mit dem Index „2 *id*" werden im folgenden die Werte hinter dem Gitter in reibungsloser (idealer) Flüssigkeit bezeichnet.

[3] Es gilt

$$V_\infty \delta^* = \int_{y=0}^{\infty} [V_\infty - v\,(y)]\, dy,$$

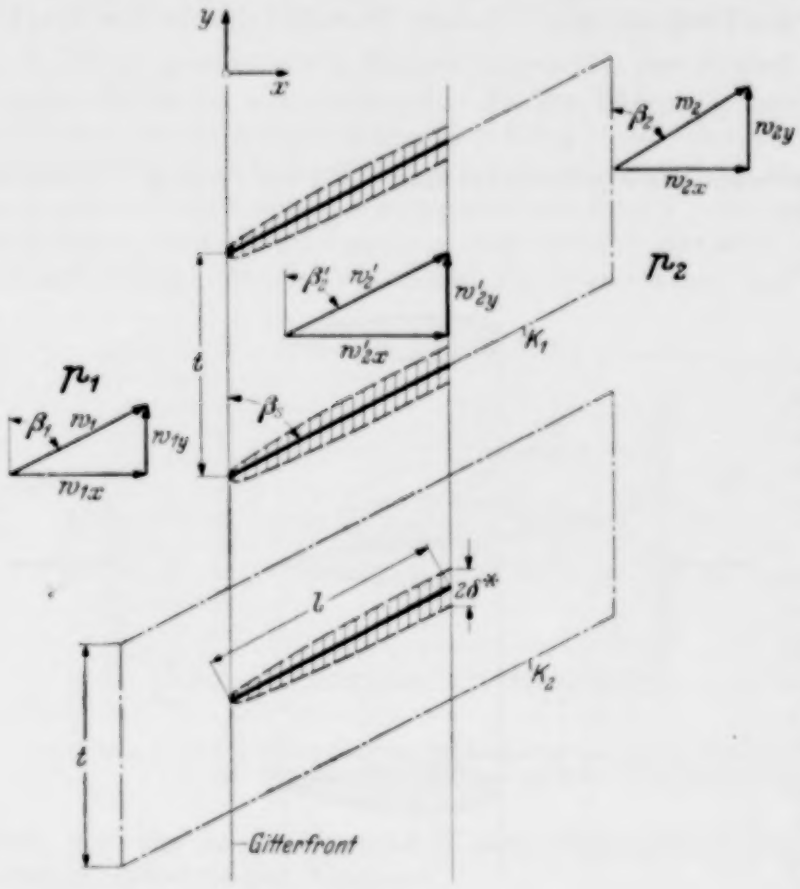
wenn $v(y)$ die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Grenzschicht ist (Abb. 3b).

[4] Die Austrittsseite dieser Kontrollfläche liege so weit hinter dem Gitter, daß dort eine über die Teilung konstante Geschwindigkeit w_2 vorhanden ist.

Austrittsebene des Gitters ist wegen der Verdrängungswirkung größer als w_1, während die über die Kanalbreite gemittelte Richtung von w_2' mit derjenigen von w_1 übereinstimmt:

$$\beta_2' = \beta_1 = \beta_{2id} \qquad (w_2' > w_1). \tag{28}$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert $w_2' = w_1 \frac{t}{t - 2\delta^*}$



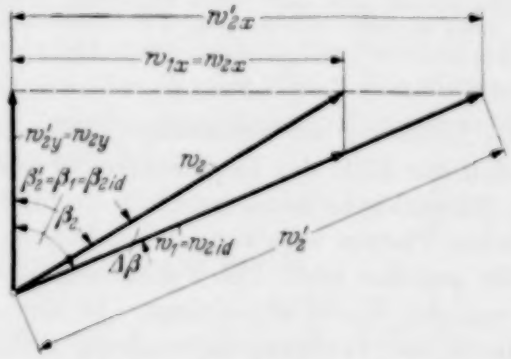


Abb. 5. Zur Abschätzung des Reibungseinflusses bei der Gitterströmung. „Plattengitter" mit $\beta_1 = \beta_s = 90°$. Durch den Reibungseinfluß tritt hinter dem Gitter eine Ablenkung gegen die Gitterfront ein: $(\Delta\beta)_R = \beta_{2id} - \beta_2 > 0$.

und andererseits auch

$$w_{2x} = w_{1x}. \tag{29}$$

Weiter liefert der Impulssatz für die y-Richtung für die Kontrollfläche K_1, da in y-Richtung innerhalb dieser Kontrollfläche keine Reaktionskräfte wirksam sind,

$$w_{2y} = w_{2y}'. \tag{30}$$

Aus den Beziehungen (27), (28), (29) und (30) ergibt sich der Geschwindigkeitsplan in Abb. 5. Hieraus ist ersichtlich, daß

$$w_2 > w_{2id} = w_1$$
und
$$\beta_2 < \beta_{2id} = \beta_1. \tag{31}$$

Durch den Reibungseinfluß wird also hinter dem Gitter der Betrag der Geschwindigkeit gegenüber dem reibungslosen Wert vergrößert, und der Strömungswinkel verkleinert, d. h. die Strömungsrichtung wird durch den Reibungseinfluß gegen die Umfangsrichtung hin abgelenkt. Dieses Ergebnis gilt in gleicher Weise für ein Verzögerungs- und Beschleunigungsgitter. Die zusätzliche Ablenkung durch die Reibung

$$(\Delta\beta)_R = \beta_{2id} - \beta_2$$

ist in jedem Fall positiv. Eine quantitative Formel zur Ermittlung von β_2 aus den übrigen Daten der Strömung wird im nächsten Abschnitt angegeben werden.

Der Druckverlust infolge Reibung für das gestaffelte Plattengitter nach Abb. 5 bei Anströmung parallel zu den Platten ergibt sich durch Anwendung des Impulssatzes für die x-Richtung auf die Kontrollfläche K_2 zu $(p_1 - p_2)\, t = W \sin\beta_s$, oder

$$\Delta p_v = \frac{W \sin\beta_s}{t}.$$

Unter Einführung von ζ_w nach (22) kommt

$$\frac{\Delta p_v}{\frac{\varrho}{2} w_1^2} = \zeta_w \frac{l}{t} \sin\beta_s, \tag{32}$$[1]

[1] Es sei hier vermerkt, daß dieser Druckverlust infolge Reibung noch nicht den Energieverlust infolge Reibung darstellt. Hinzu kommt der Anteil der Änderung der kinetischen Energie infolge der Reibung, da $|w_2| \neq |w_{2id}|$. Der gesamte Energieverlust infolge Reibung wird in Abschnitt 6 berechnet werden.

was für $\beta_s = \pi/2$ in (26) übergeht. Dieser zusätzliche Druckabfall infolge Reibung tritt auch beim Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter auf. Infolgedessen erhält man beim Beschleunigungsgitter in der wirklichen Strömung einen größeren Druckabfall als in der verlustlosen (idealen) Strömung, während beim Verzögerungsgitter in der wirklichen Strömung der Druckanstieg geringer ist als bei der verlustlosen Strömung.

$$\left.\begin{aligned} &\text{Beschleunigungsgitter:}\\ &\quad p_1 - p_2 > p_1 - p_{2id},\\ &\text{Verzögerungsgitter:}\\ &\quad p_2 - p_1 < p_{2id} - p_1. \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

In beiden Fällen ist

$$p_2 < p_{2id}\,. \qquad (33\,a)$$

Eine quantitative Formel zur Ermittlung von $\Delta p_v = p_{2id} - p_2$ für Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter wird ebenfalls im nächsten Abschnitt angegeben werden.

Der Kräfteplan einer reibungslosen Gitterströmung (Abb. 6) ist dadurch gekennzeichnet, daß die resultierende Schaufelkraft A senkrecht auf der Richtung von w_∞ steht, die das vektorielle Mittel von w_1 und w_{2id} ist (Abb. 1)[1]. Der Auftrieb A kann in die Komponenten $P_y = U$ in Richtung der Gitterfront (Umfangskraft) und $P_x = S$ normal zur Gitterfront (Schub) zerlegt werden. Die Reibung verursacht nun auch nach (33a) einen zusätzlichen Schub S_v, der immer positiv, d. h. in Richtung von $w_{x\infty}$, wirkt. Die resultierende Kraft R bei der Gitterströmung mit Reibung erhält hierdurch gegenüber A eine Drehung um den Gleitwinkel ε. Sie kann wiederum, wie auch beim Einzelflügel, in die Komponenten A (Auftrieb) und W (Widerstand) zerlegt werden. Im Gegensatz zum Einzelflügel erfolgt beim Beschleunigungsgitter eine Auftriebssteigerung um A_v, beim Verzögerungsgitter eine Auftriebsverminderung um A_v. Beim Gleichdruckgitter bleibt der Auftrieb durch die Reibung unverändert, der Schub wird gleich dem Widerstand. Dieser Fall liegt beim Einzelflügel ($t \to \infty$) immer vor.

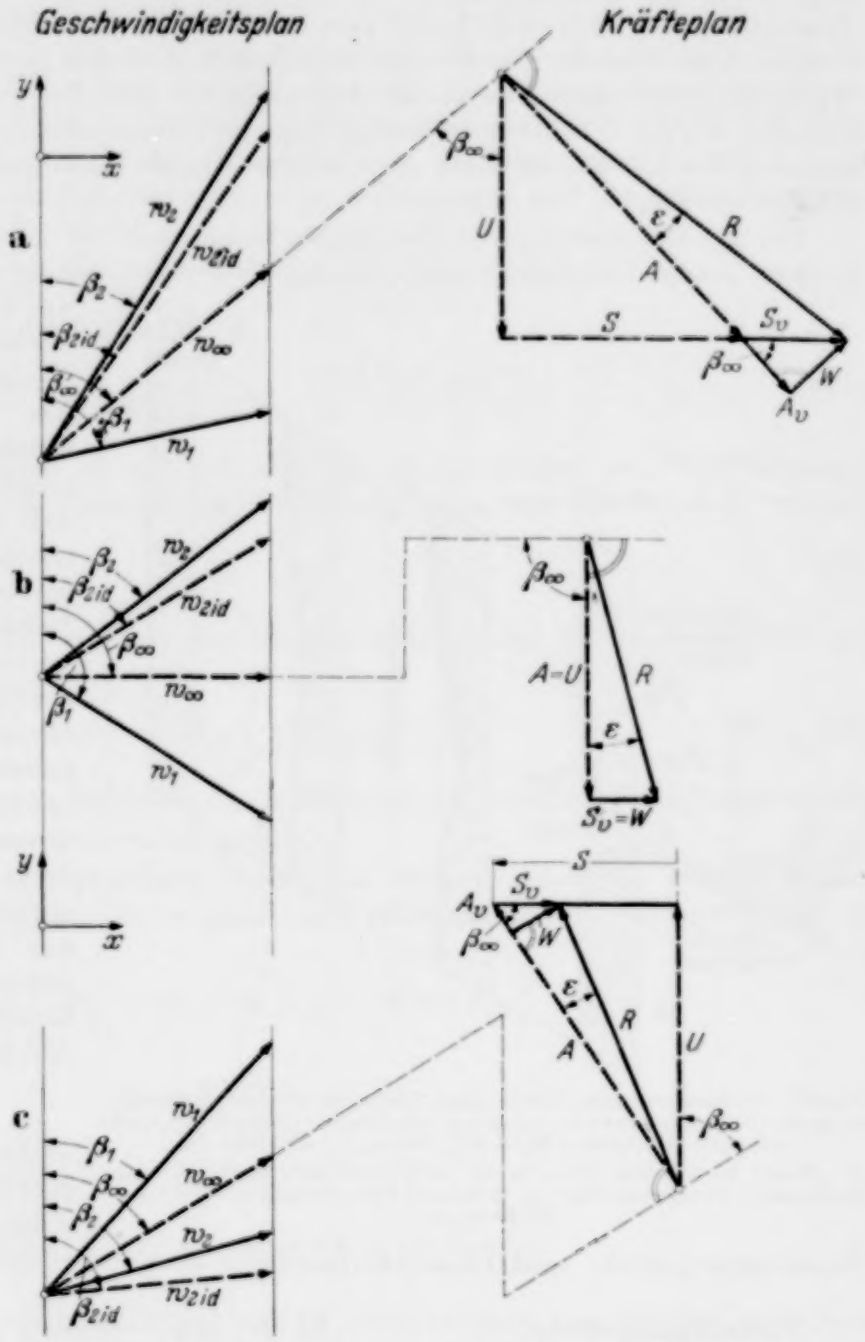


Abb. 6. Geschwindigkeits- und Kräfteplan der Gitterströmung mit Reibung für
a) Beschleunigungsgitter (Turbine): $p_1 > p_{2id}$; $\beta_1 > \beta_{2id}$.
b) Gleichdruckgitter (reine Umlenkung): $p_1 = p_{2id}$; $\beta_1 = \pi - \beta_{2id}$.
c) Verzögerungsgitter (Verdichter): $p_1 < p_{2id}$; $\beta_1 < \beta_{2id}$.
In reibungsloser Strömung ist die resultierende Schaufelkraft A senkrecht zur „mittleren" Strömungsrichtung w_∞. Der Reibungseinfluß verursacht einen Druckverlust $\Delta p_v = p_{2id} - p_2$, der einen zusätzlichen Schub S_v liefert. Aus A und S_v ergibt sich die resultierende Schaufelkraft R in der wirklichen (reibungsbehafteten) Strömung. Zerlegung von S_v normal und parallel zu w_∞ ergibt A_v bzw. W = Widerstand. In allen drei Fällen gilt $W = S_v \cdot \sin\beta_\infty$.

Zwischen dem Widerstand W und dem Zusatzschub infolge Reibung S_v besteht in allen drei Fällen (Beschleunigungs-, Verzögerungs- und Gleichdruckgitter) die Beziehung

$$W = S_v \sin\beta_\infty\,, \qquad (34)$$

auf die wir später zurückkommen werden.

[1] Man beachte, daß in Abb. 1 die Werte mit dem Index „2" diejenigen in der reibungslosen Strömung bedeuten, die hier mit „2 *id*" bezeichnet sind.

6. Ermittlung der Energieverluste im Gitter aus den Grenzschichtgrößen an der Schaufelhinterkante. Durch Weiterführung der im vorigen Abschnitt für das Plattengitter angestellten Betrachtungen soll jetzt in diesem Abschnitt für ein beliebiges Schaufelgitter die Berechnung der Energieverluste ausgeführt werden. Der gesamte Energieverlust läßt sich, wie schon früher angegeben, aufteilen in die Grenzschichtverluste und die Mischungsverluste im Nachlauf. Die Ermittlung der Grenzschichtverluste erfordert die Berechnung der (laminaren oder turbulenten) Grenzschicht von der Vorder- bis zur Hinterkante der Schaufel. Die Mischungsverluste werden ermittelt durch Anwendung des Impulssatzes von der Schaufelhinterkanten-Ebene bis „weit hinten", wo die Nachlaufströmung ausgeglichen ist. Bei der rechnerischen Ermittlung der Verluste werden wir jedoch nicht diese beiden Anteile getrennt berechnen, sondern nur den Gesamt-Energieverlust.

Für die Berechnung der Reibungsschicht zu der in Abschnitt 4 ermittelten potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung längs der Schaufelkontur haben wir bei laminarer Strömung das Verfahren von *K. Pohlhausen*[1] mit der Verbesserung durch *H. Holstein* und *T. Bohlen*[2], und für den turbulenten Fall das Verfahren von *E. Gruschwitz*[3] verwendet. Die Rechnung verläuft in genau gleicher Weise wie beim Einzelflügel, so daß es sich erübrigt, hier näher darauf einzugehen. Im übrigen sei für die Durchführung der Rechnung auch auf das in Fußnote 1 von S. 42 zitierte Werk verwiesen. Für die Ermittlung der Energieverluste ist es übrigens nicht erforderlich, für die Grenzschicht an jeder Stelle die genaue Geschwindigkeitsverteilung zu kennen. Es genügt die Ermittlung der sog. Grenzschicht-Kenngrößen Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke und Wandschubspannung. Insbesondere braucht man für das Folgende diese Kenngrößen an der Schaufelhinterkante. Bedeutet $v(n)$ die Geschwindigkeit in der Grenzschicht in Abhängigkeit vom Wandabstand

$$n = y \sin \beta_2 ,$$

und w_2' die potentialtheoretische Geschwindigkeit außerhalb der Grenzschicht an der Schaufelhinterkante (Abb. 7), so sind die

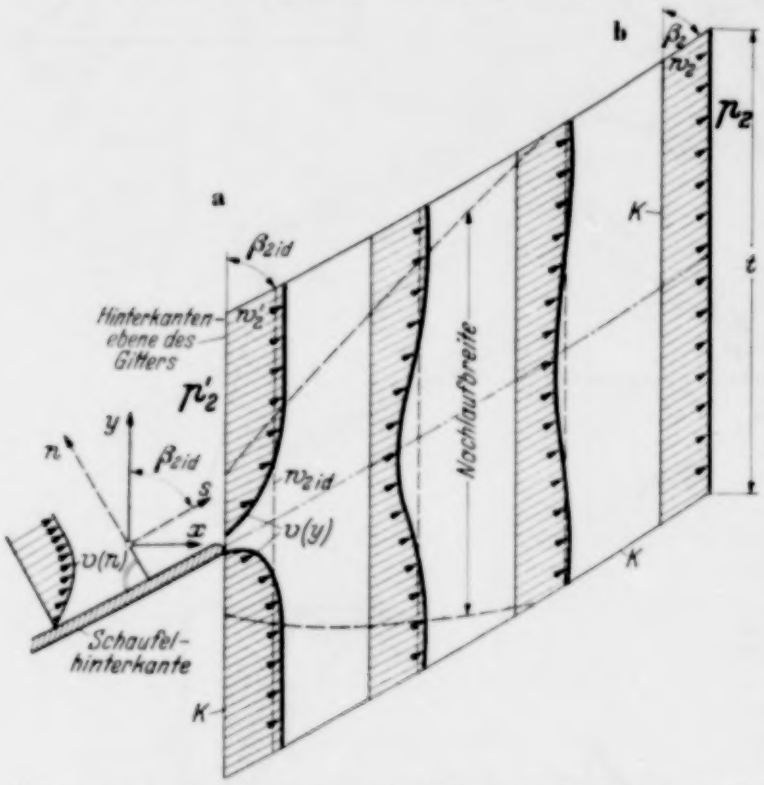


Abb. 7. Nachlaufströmung hinter einer Gitterschaufel (schematisch). a) In der Hinterkantenebene: Geschwindigkeit in der Grenzschicht $v(y)$ außerhalb der Grenzschicht w_2'; Druck p_2'; Richtung β_{2id}. b) „Weit" hinter dem Gitter in der wirklichen (reibungsbehafteten) Strömung: Geschwindigkeit w_2 (konstant über Teilung t); Druck p_2; Richtung β_2.

Verdrängungsdicke und Impulsverlustdicke an der Schaufelhinterkante

Verdrängungsdicke:
$$\delta_H^* = \int_0^\infty \left[1 - \frac{v(n)}{w_2'}\right] dn , \tag{35a}$$

Impulsverlustdicke:
$$\vartheta_H = \int_0^\infty \frac{v(n)}{w_2'} \left[1 - \frac{v(n)}{w_2'}\right] dn . \tag{35b}$$

Diese Größen sehen wir auf Grund der Grenzschicht-Rechnung als bekannt an.

Nach dem Zusammenfließen der beiden Grenzschichten an der Schaufelhinterkante findet hinter dem Gitter ein Vermischungsvorgang statt, bis alle Geschwindigkeitsunterschiede ausgeglichen sind (Abb. 7). Die am Ende dieses Vorganges vorhandene Gesamtenergie der Strömung gegenüber der Potentialströmung soll im folgenden berechnet werden. Der Strömungszustand weit hinter dem Gitter wird beschrieben durch Angabe der drei Größen Druck, Geschwindigkeitsbetrag und Geschwindigkeitsrichtung. Mit p_2, w_2, β_2 seien die Größen in der wirklichen (reibungsbehafteten) Strömung, und mit dem Index $_{2\,id}$ die Größen in der verlustlosen Strömung weit

[1] *K. Pohlhausen*, Z. angew. Math. Med. 1, (1921). S. 235.

[2] *H. Holstein und T. Bohlen*, Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Nährungsansatz von K. Pohlhausen genügen, Lilienthal Bericht, S. 10, 5 (1940).

[3] *E. Gruschwitz*, Ing. Arch., 2. S. 321. (1931).

hinten bezeichnet, während durch p_2', w_2' die Werte an der Schaufelhinterkante gekennzeichnet werden sollen.

Für die Ermittlung der drei Größen p_2, w_2, β_2 aus denjenigen an der Hinterkante, die aus der Grenzschichtrechnung bekannt sind, stehen drei Gleichungen zur Verfügung, nämlich die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichungen für die x- und y-Richtung für die in Abb. 7 angegebene Kontrollfläche K.

Um diese Rechnung auszuführen, geben wir den Ausdrücken für δ_H^* und ϑ_H nach (35a, b) noch eine etwas andere Gestalt, indem wir über die Gitterfrontrichtung y integrieren und ferner die Längen mit der Teilung t dimensionslos machen. Als Integrationsintervall wählen wir jetzt die Teilung t, so daß sich das Integral über die Grenzschichten an Ober- und Unterseite der Schaufel erstreckt. Die so erhaltenen dimensionslosen Verdrängungs- und Impulsdicken sind wegen $dn = dy \cdot \sin\beta_{2\,id}$

$$\Delta^* = \frac{\delta_{H\,ob}^* + \delta_{H\,unt}^*}{t \cdot \sin\beta_{2\,id}} = \int_0^1 \left[1 - \frac{v(y)}{w_2'}\right] d\left(\frac{y}{t}\right), \tag{36a}$$

$$\Theta = \frac{\vartheta_{H\,ob} + \vartheta_{H\,unt}}{t \cdot \sin\beta_{2\,id}} = \int_0^1 \left[1 - \frac{v(y)}{w_2'}\right] \frac{v(y)}{w_2'}\, d\left(\frac{y}{t}\right). \tag{36b}$$

Die potentialtheoretische Geschwindigkeit am Schaufelende w_2' ist wegen der Verdrängungswirkung der Grenzschicht größer als die Potentialgeschwindigkeit $w_{2\,id}$ weit hinten, und zwar gilt

$$w_2' = \frac{w_{2\,id}}{1 - \Delta^*}. \tag{37}$$

Entsprechend ist der Druck p_2' an der Hinterkante kleiner als $p_{2\,id}$ weit hinten, und zwar gilt nach der *Bernoulli*schen Gleichung

$$p_2' = p_{2\,id} - \frac{\varrho}{2} w_{2\,id}^2 \left[\frac{1}{(1 - \Delta^*)^2} - 1\right]. \tag{38}$$

Der Abströmwinkel in der Hinterkanten-Ebene kann im Mittel gleich dem der Potentialströmung weit hinter dem Gitter angenommen werden, $\beta_2' = \beta_{2\,id}$.

1. **Kontinuität:** Die Kontinuitätsgleichung liefert die Aussage, daß die x-Komponente der Geschwindigkeit vor und hinter dem Gitter gleich sein muß, sowohl für die verlustlose als auch für die wirkliche Strömung:

$$w_{1x} = w_{2id\,x} = w_{2x} = w_{2\,id} \sin\beta_{2\,id} = w_2 \sin\beta_2.$$

Somit ist

$$\frac{w_2}{w_{2\,id}} = \frac{\sin\beta_{2\,id}}{\sin\beta_2}. \tag{39}$$

2. **Impulssatz in y-Richtung:** Dieser liefert

$$\varrho \sin\beta_{2\,id} \cos\beta_{2\,id} \int_0^1 v^2(y)\, d\frac{y}{t} = \varrho \sin\beta_2 \cos\beta_2 w_2^2.$$

Nach Division durch $\varrho w_2'^2$ und durch Hinzufügen und Wiederabziehen von $v(y)/w_2'$ und 1 auf der linken Seite ergibt sich

$$\sin\beta_{2\,id} \cdot \cos\beta_{2\,id} \left[1 - \int_0^1 \frac{v(y)}{w_2'} \left|1 - \frac{v(y)}{w_2'}\right| d\frac{y}{t} - \int_0^1 \left|1 - \frac{v(y)}{w_2'}\right| d\frac{y}{t}\right] = \sin\beta_2 \cdot \cos\beta_2 \frac{w_2^2}{w_2'^2}.$$

Hierdurch sind die Grenzschichtgrößen an der Hinterkante nach (36) eingeführt, so daß man hat

$$\sin\beta_{2\,id} \cos\beta_{2\,id} (1 - \Theta - \Delta^*) = \sin\beta_2 \cos\beta_2 \frac{w_2^2}{w_2'^2}.$$

Durch Einführung von (39) und (37) und nach einigen Umformungen wird schließlich:

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta_2}{\operatorname{ctg}\beta_{2\,id}} = \frac{1 - \Theta - \Delta^*}{(1 - \Delta^*)^2} = \chi. \tag{40}$$

3. **Impulssatz in x-Richtung:** Dieser liefert

$$\varrho \sin^2\beta_{2id} \int_0^1 v^2(y)\, d\frac{y}{t} + p_2' = \varrho\, w_2^2 \sin^2\beta_2 + p_2.$$

Ganz analog zu dem Vorigen ergibt sich hieraus

$$\frac{p_2 - p_2'}{\frac{\varrho}{2} w_{2\,id}^2} = 2 \sin^2 \beta_{2\,id} \left| \frac{1 - \Theta - \Delta^*}{(1-\Delta^*)^2} - 1 \right| = 2 (\chi - 1) \sin^2 \beta_{2\,id} .$$

Die Druckdifferenz gegenüber dem potentialtheoretischen Wert beträgt bei Einführung von (38) und mit der Abkürzung (40)

$$\frac{p_{2\,id} - p_2}{\frac{\varrho}{2} w_{2\,id}^2} = \frac{2\Delta^* - \Delta^{*2}}{(1-\Delta^*)^2} - 2 (\chi - 1) \sin^2 \beta_{2\,id} . \tag{41}$$

Schließlich erhalten wir den gesuchten gesamten Energieverlust als den Gesamtdruckverlust der Potentialströmung zu

$$g_1 - g_2 = \Delta g = p_{2\,id} + \frac{\varrho}{2} w_{2\,id}^2 - \left(p_2 + \frac{\varrho}{2} w_2^2 \right) . \tag{42}$$

Mit (39) und (41) ergibt sich aus (42) der Gesamtdruckverlust bezogen auf den potentialtheoretischen Austrittsstaudruck, zu

$$\frac{\Delta g}{\frac{\varrho}{2} w_{2\,id}^2} = \frac{2\Delta^* - \Delta^{*2}}{(1-\Delta^*)^2} - 2 (\chi - 1) \sin^2 \beta_{2\,id} - (\chi^2 - 1) \cos^2 \beta_{2\,id} . \tag{43}$$

Hierbei rühren der erste und zweite Term von der Druckänderung, der letzte Term von der Geschwindigkeitsänderung her. Diese ergibt sich aus (39) in Verbindung mit (40) zu

$$\frac{w_2}{w_{2\,id}} = \sqrt{\sin^2 \beta_{2\,id} + \chi^2 \cos^2 \beta_{2\,id}} . \tag{44}$$

Die Änderung des Abströmwinkels gegenüber dem potentialtheoretischen Wert ist durch (40) gegeben. Die Gleichungen (40), (41) und (44) geben die Lösung der oben gestellten Aufgabe, nämlich die Änderung von p_2, w_2, β_2 gegenüber den potentialtheoretischen Werten. Darüber hinaus gibt (43) noch den hauptsächlich interessierenden gesamten Energie-Verlust. Dabei ist die Ermittlung dieser Größen zurückgeführt auf die Grenzschicht-Kenngrößen Δ^* (= Verdrängungsdichte) und Θ (= Impulsverlustdicke) an der Schaufelhinterkante.

Im Grenzfall verschwindender Reibung, $Re \to \infty$, wird $\Delta^* = \Theta = 0$, und damit aus (40) $\chi = 1$, und somit aus (40) bis (44) $p_2 = p_{2\,id}$, $w_2 = w_{2\,id}$, $\beta_2 = \beta_{2\,id}$; $\Delta g = 0$.

Die Größe χ nach (40) ist in jedem Fall größer als eins, da das Grenzschichtendickenverhältnis an der Hinterkante $\delta_H^*/\vartheta_H > 1$ ist. Wir erhalten damit qualitativ wieder die Ergebnisse der vorangegangenen groben Abschätzung für den Einfluß der Reibung: Vergrößerung des Druckabfalles, Vergrößerung der Abströmgeschwindigkeit und Verkleinerung des Abströmwinkels.

Der Gesamtdruckverlust Δg enthält sowohl die Reibungsverluste in der Grenzschicht als auch die Mischungsverluste im Nachlauf. Darin sind auch die Stoßverluste infolge der plötzlichen Querschnittserweiterung an der Hinterkante enthalten (Carnotscher Stoßverlust). Die vorstehenden Gleichungen können deshalb auch auf den Fall einer endlich dicken Hinterkante angewandt werden, indem man zur Verdrängungsdicke Δ^* noch die Größe $s_H/t \cdot \sin \beta_2$ hinzuschlägt (s_H = Dicke der Hinterkante). Der Wert der Impulsverlustdicke bleibt dadurch ungeändert.

Gitter mit $\beta_s = 90°$, ohne Umlenkung: Als Abschluß dieser Betrachtungen möge noch kurz wieder das Gitter von Abb. 4 behandelt werden, das aus symmetrisch profilierten Schaufeln mit $\beta_s = 90°$ besteht und mit $\beta_1 = 90°$ angeströmt wird. Hierfür gilt $\beta_{2\,id} = \beta_1 = 90°$. Damit ergibt sich aus (42), wenn man wegen die höheren Potenzen von Δ^* gegenüber der ersten vernachlässigt, $\Delta^* \ll 1$ und da wegen $w_{2\,id} = w_2 = w_1$ noch $\Delta g = p_{2\,id} - p_2 = \Delta p_v$ gilt, die einfache Formel

$$\frac{\Delta p_v}{\frac{\varrho}{2} w_1^2} = 2 \Theta = 2 \frac{\vartheta}{t} ,$$

Führt man den Widerstandsbeiwert der Schaufel nach (24) ein durch $2 \vartheta/l = \zeta_w$, so erhält man

$$\frac{\Delta p_v}{\frac{\varrho}{2} w_1^2} = \zeta_w \frac{l}{t} .$$

in Übereinstimmung mit (26).

7. Definition von verschiedenen Gitterverlustbeiwerten. Über die geeignete Definition von Gitterverlustziffern und Gitterwirkungsgraden ist im Schrifttum mehrfach diskutiert worden [1, 2, 3]. Im Hinblick auf die nachfolgenden Beispiel-Rechnungen mögen hier einige Gitterverlustziffern und Wirkungsgrade charakterisiert und miteinander verglichen werden. Eine gewisse Schwierigkeit liegt darin, eine den verschiedenen Aufgaben eines Gitters angemessene Bezugsgröße für den Energieverlust im Gitter zu finden. Die drei Aufgaben eines Gitters, nämlich: 1. kinetische Energie in Druckenergie (Pumpengitter), 2. Druckenergie in kinetische Energie (Turbinengitter) umzusetzen und 3. die Strömung umzulenken (Gleichdruckgitter), sind nicht immer klar voneinander getrennt. Zum anderen ist es notwendig, zum Vergleich der drei Gitterarten miteinander einen Beiwert zu finden, der allen drei Arten gerecht wird. Hierzu scheint uns die von *H. Marcinowski* vorgeschlagene Gitterverlustziffer ζ_g besonders geeignet, die den Gesamtdruckverlust im Gitter auf den Durchsatz im Gitter bezieht. Mit G als Durchsatz in kg/s und F als freien Strömungsquerschnitt, gemessen in der Gitterebene, gilt für die Geschwindigkeitskomponente normal zur Gitterfront (γ = spez. Gewicht)

$$w_{x\infty} = \frac{G}{\gamma F} . \tag{45}$$

Bezieht man die Gitterverlustziffer auf den Staudruck von $w_{x\infty}$, so ist

$$\zeta_g = \frac{\Delta g}{\frac{\varrho}{2} w_{x\infty}^2} . \tag{46}$$

Sie ergibt sich aus (43) wegen $w_{x\infty} = w_{2\,id} \sin \beta_{2\,id}$ zu

$$\zeta_g = \frac{1}{\sin^2 \beta_{2id}} \left[\frac{2\Delta^* - \Delta^{*2}}{(1-\Delta^*)^2} - 2(\chi - 1) - (\chi^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \beta_{2\,id} \right] . \tag{47}$$

Im Strömungsmaschinenbau ist es üblich, die Gitterverluste durch Einführung einer Geschwindigkeitsziffer ψ zu berücksichtigen, indem man statt des Gesamtdruckverlustes eine äquivalente Abminderung der Austrittsgeschwindigkeit $w_{2\,id}$ der verlustlosen Strömung annimmt. Die Definitionsgleichung für ψ lautet somit

$$p_2 + \frac{\varrho}{2} w_2^2 \equiv p_{2\,id} + \frac{\varrho}{2} (\psi w_{2\,id})^2 .$$

Führt man den Gesamtdruckverlust nach (42) ein, so folgt

$$\Delta g \equiv \frac{\varrho}{2} w_{2\,id}^2 (1 - \psi^2) . \tag{48}$$

Der Zusammenhang mit der Gitterverlustziffer ζ_g nach (46) ist somit gegeben durch

$$\psi = \sqrt{1 - \sin^2 \beta_{2\,id} \zeta_g} ; \qquad \zeta_g \equiv \frac{1 - \psi^2}{\sin^2 \beta_{2\,id}} . \tag{49}$$

Eine weitere wichtige Größe ist der vor allem vom Einzelflügel her gebräuchliche Widerstandsbeiwert ζ_w, der bereits in (22) eingeführt wurde. Es ergibt sich, wenn S_v die Schubänderung infolge des Widerstandes ist, aus dem Kräfteplan in Abb. 6 und aus (34):

$$W = S_v \sin \beta_\infty = \Delta p_v \, t \sin \beta_\infty \approx \Delta g \, t \sin \beta_\infty ,$$

wo $\Delta p_v = p_{2\,id} - p_2$ den Druckverlust infolge Reibung bedeutet, der in guter Näherung mit dem Gesamtdruckverlust Δg übereinstimmt[4]. Damit wird

$$\zeta_w = \frac{W}{\frac{\varrho}{2} w_\infty^2 \cdot l} \approx \zeta_g \frac{t}{l} \sin^3 \beta_\infty . \tag{50}$$

Das Verhältnis von Widerstand zu Auftrieb liefert die Profilgleitzahl $\varepsilon = \zeta_w / \zeta_a$. Mit ζ_a nach (10) ergibt sich somit aus (50):

$$\varepsilon = \frac{\zeta_w}{\zeta_a} \approx \frac{\zeta_g \sin^2 \beta_\infty}{2 (\operatorname{ctg} \beta_{2\,id} - \operatorname{ctg} \beta_1)} . \tag{51}$$

---

[1] *H. Marcinowski*, Definition einer Gitterverlustziffer. Vortrag der Braunschweiger Gittertagung 1944 (als Manuskript verbreitet).

[2] *W. Traupel*, Neue allgemeine Theorie der mehrstufigen achsialen Turbomaschinen. Zürich 1942.

[3] *C. Keller*, *Axialgebläse* vom Standpunkt der Tragflügeltheorie. Zürich 1934.

[4] Daß der Widerstand W nicht exakt durch die Verlustziffer ζ_g ausgedrückt werden kann, hängt damit zusammen, daß W als die Kraft in Richtung von w_∞ definiert wurde. w_∞ stellt aber das vektorielle Mittel aus den „reibungslosen" Geschwindigkeiten weit vor und hinter dem Gitter dar.

Einen Wirkungsgrad von Beschleunigungs- und Verzögerungsgittern definiert *A. Betz*[1] in der Weise, daß er den Energieverlust auf die im Gitter umgesetzte Energie bezieht. Dies gibt für Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter verschieden definierte Wirkungsgrade, nämlich

$$\left.\begin{aligned} &\text{Turbinengitter:} \quad \eta_T = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2} = 1 - \frac{\Delta g}{p_1 - p_2} \\ &\text{Pumpengitter:} \quad \eta_P = \frac{p_2 - p_1}{q_1 - q_2} = 1 - \frac{\Delta g}{q_1 - q_2} \end{aligned}\right| \tag{52}$$

Durch Einführung der Profilgleitzahl erhält man hieraus

$$\eta_T = \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_\infty}{1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_\infty}, \qquad \eta_P = \frac{1 - \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_\infty}{1 + \varepsilon \operatorname{tg} \beta_\infty}. \tag{53}$$

Beide Definitionen des Wirkungsgrades versagen jedoch im Falle des Gleichdruckgitters, wo die umgesetzte Energie gleich Null ist.

Einen für alle Fälle brauchbaren Wirkungsgrad erhält man, wenn man die vor und hinter dem Gitter vorhandenen Gesamtenergien ins Verhältnis setzt, den Energieverlust also nicht auf die umgesetzte Energie, sondern auf die Gesamtenergie E_1 vor dem Gitter bezieht

$$\eta_g = \frac{E_2}{E_1} = \frac{p_2 + q_2}{p_1 + q_1} = 1 - \frac{\Delta g}{p_1 + q_1}.$$

Setzen wir das Energieniveau der Strömung fest durch

$$E = 0: \qquad q = 0, \qquad p = p_2,$$

messen wir also die Drücke als Differenzdrücke gegenüber dem Druck p_2 hinter dem Gitter, dann ist wegen $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 + \Delta g$:

$$\eta_g = \frac{q_2}{\Delta g + q_2}. \tag{54}$$

Nach Einführung der Gitterverlustziffer (46) wird

$$\eta_g = \frac{1}{1 + \zeta_g \cdot \sin^2 \beta_{2id}}. \tag{55}$$

Dieser Wirkungsgrad ermöglicht einen Vergleich von Pumpen-, Gleichdruck- und Turbinengitter.

Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Teilung. Für sehr kleine Teilungen t wachsen die auf die Teilung bezogene Verdrängungs- und Impulsverlustdicke Δ^* und Θ nach Gl. (36a, b) stark an. Nach Gl. (47) wird der Gitterverlustbeiwert ζ_g unendlich, wenn $\Delta^* = 1$ ist. Nach (36a) bedeutet $\Delta^* = 1$, daß der Zwischenraum zwischen zwei Schaufeln an der Hinterkante gerade durch die Verdrängungsdicke der beiden Schaufeln ausgefüllt wird, so daß also nichts mehr durch das Gitter hindurchfließen würde. Sollen die in Abschnitt 6 gemachten Annahmen noch sinnvoll bleiben, dann muß die Verdrängungsdicke klein gegen die Teilung bleiben, d. h. es muß $\Delta^* \ll 1$ sein. Hierdurch ist für das Teilungsverhältnis eine untere Grenze festgelegt, bis zu welcher unser Formelsystem anwendbar ist. Es muß etwa sein:

$$\frac{t}{l} \geq 5 \, \frac{\delta^*_{H\,ob} + \delta^*_{H\,unt}}{l \cdot \sin \beta_{2id}}. \tag{56}$$

Dem entspricht $\Delta^* \leq 1/5$.

Für sehr große Teilungen treffen zwar unsere Annahmen über die Geschwindigkeitsverteilung in der Hinterkanten-Ebene immer weniger zu, da wir uns mehr und mehr den Verhältnissen an einer Einzelschaufel nähern. Trotzdem aber liefert der Grenzübergang $t/l \to \infty$ ein durchaus sinnvolles Ergebnis. Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, erhält man aus (50) für den Widerstandsbeiwert der Gitterschaufel mit ζ_g nach (47) im Grenzübergang $t/l \to \infty$ den Ausdruck für den Widerstandsbeiwert des Einzelflügels, wie er in (24) angegeben wurde mit $\vartheta = \vartheta_H$.

8. Beispiele und Ergebnisse. Das vorstehend erläuterte Verfahren zur theoretischen Berechnung der Gitterverlustbeiwerte soll jetzt an einigen Beispielen erprobt werden. Dabei kommt es uns besonders auf die charakteristische Gegenüberstellung von Beschleunigungs- und Verzögerungsgittern an. Um sinnvolle Vergleiche anstellen zu können, wird für Beschleunigung und Verzögerung das gleiche Gitter zugrunde gelegt und lediglich die Strömungsrichtung umgekehrt. Die umgesetzte Geschwindigkeits- bzw. Druckhöhe ist somit bei beiden Gittern gleich. Ferner

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 43.

sollen Gitterteilung und Schaufelform derart variiert werden, daß für die Potentialströmung weit vor und hinter den Gittern in allen Fällen die gleichen Strömungsverhältnisse herrschen. Es sollen also Gitter mit verschieden großer Teilung potentialtheoretisch die gleiche Aufgabe erfüllen. Um dies zu erreichen, muß mit wachsender Teilung die Wölbung der Schaufeln zunehmen (Winkelübertreibung).

a) Potentialströmung: Für die Berechnung der zugehörigen Potentialströmung an den Schaufeln eignet sich das in Abschnitt 4 beschriebene Verfahren besonders gut. Dabei wird eine Zirkulationsverteilung über die Gitterbreite vorgegeben, die sich für verschiedene Teilungsverhältnisse nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet. Für gleiche Zu- und Abströmwinkel muß dabei, wie aus (8) zu ersehen ist, die Zirkulation einer Schaufel Γ proportional dem Teilungsverhältnis des Gitters sein. Ferner muß, da zunächst nur „unendlich dünne" Profile nach dieser Methode behandelt werden sollen, stoßfreier Eintritt vorausgesetzt werden[1]. Es muß also die Zirkulationsverteilung über die Schaufeltiefe $\gamma(x)$ am Eintritt und Austritt Null werden. Wir wählen deshalb eine elliptische Zirkulationsverteilung über die Schaufeltiefe und setzen mit $\xi = 2\,x/b$ (Abb. 8a)

$$\frac{\gamma(\xi)}{2 w_{x\infty} \frac{t}{b}} = C \sqrt{1 - \xi^2} \,. \tag{57}$$

Dabei ist C eine Konstante, die mit der geforderten Gesamtumlenkung zusammenhängt. Durch Integration von $\gamma(\xi)$ über die Gitterbreite nach (15) erhält man die Gesamtzirkulation einer Schaufel in Verbindung mit (8) zu

$$\frac{\Gamma}{w_{x\infty}\, t} = \operatorname{ctg} \beta_{2\,id} - \operatorname{ctg} \beta_1 = C \frac{\pi}{2} \,. \tag{58}$$

Hierdurch ist bei vorgegebenem Zu- und Abströmwinkel die Konstante C festgelegt. Somit ergibt sich der Auftriebsbeiwert einer Schaufel nach (10) zu

$$\zeta_a = C \pi \frac{t}{l} \sin \beta_\infty \,. \tag{59}$$

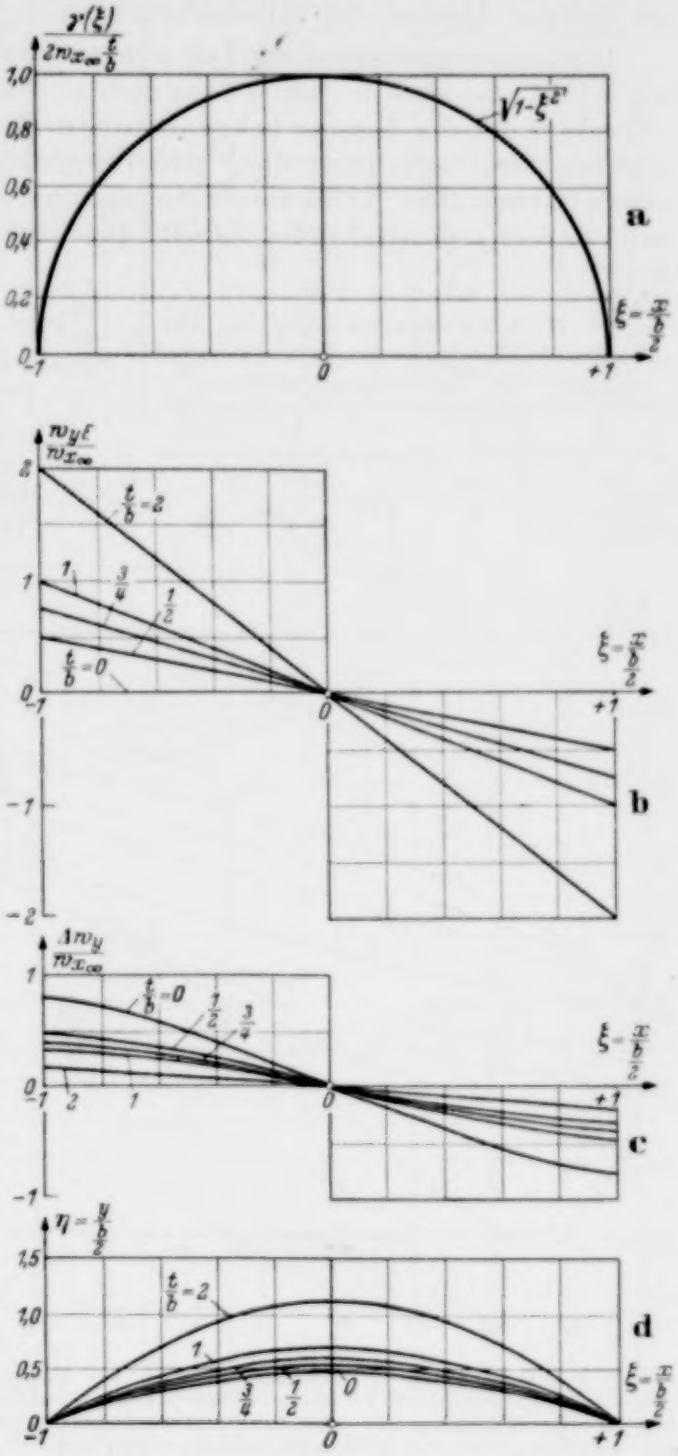


Abb. 8. (a) Zirkulationsverteilung, (b) (c) Abwindverteilung, (d) Kontur einer Schaufel im Gitterverband bei verschiedenen Teilungen t/b. Die Zirkulationsverteilung ist elliptisch. w_{yE} = induzierte Abwärtsgeschwindigkeit der Einzelschaufel; Δw_y = induzierter Abwind aller übrigen Schaufeln; $t/b = 0$ ist die „Stromfaden-Theorie" (schaufelkongruente Strömung). Wegen $C = 1$ zugehöriger Umlenkwinkel $\Delta\beta = 75°$ für alle Schaufelkonturen nach Gl. (58).

Schaufelform: Die Ermittlung der Schaufelform erfordert zunächst die Ermittlung der Abwindverteilung $w_y(x)$ längs der Schaufel. Diese kann in bequemer Weise nach (19) ausgeführt werden, wenn man dort für $\gamma(x')$ die Verteilung (57) einsetzt. Es ist zweckmäßig, hierbei den Anteil des Einzelflügels [erster Term in (19)] und den Einfluß aller übrigen Schaufeln [zweiter Term in (19)] getrennt zu berechnen. Der Anteil des Einzelflügels liefert nach *Birnbaum*[2]

$$w_{yE} = -\frac{t}{b} C \xi w_{x\infty} \,.$$

[1] Bei unendlich dünnen Profilen mit nichtstoßfreiem Eintritt erhält man an der Eintrittskante potentialtheoretisch eine unendlich große Geschwindigkeit. Hiermit kann die Grenzschichtrechnung nicht in Gang gesetzt werden.

[2] Vgl. Fußnote 11 von S. 43.

In Abb. 8b, c sind beide Anteile dargestellt für die Teilungen $t/b = 0, 1/2, 3/4, 1, 2$. Ein Vergleich beider Anteile zeigt, daß z. B. für $t/b = 1$ der Abwind aller übrigen Schaufeln etwa halb so groß ist wie der Abwind der Einzelschaufel.

Die Schaufelkonturen ergeben sich aus der Abwindverteilung durch nochmalige Integration nach (18). Sie sind in Abb. 8d angegeben. Für die Einzelschaufel mit elliptischer Zirkulationsverteilung ist die Kontur bekanntlich ein Parabelbogen. Für die Schaufel im Gitter mit der gleichen Zirkulationsverteilung trifft dies nicht mehr zu; die Schaufel ist hier an den Enden etwas flacher. Die Winkelübertreibungen an den Schaufelenden infolge der endlichen Schaufelzahl sind in nebenstehender Tabelle angegeben ($\beta^* =$ Winkel der Schaufelkante gegen Gitterfront).

Tabelle 1. Winkelübertreibung bei verschiedenen Teilungsverhältnissen und elliptischer Zirkulationsverteilung.

t/b	0	0,5	1,0	2,0
$\frac{\operatorname{ctg}\beta^*}{\operatorname{ctg}\beta_1}$ . .	1	1,25	1,69	2,79

Für die weitere Rechnung müssen die Zu- und Abströmwinkel festgelegt werden. Hierfür haben wir gewählt:

	β_1	β_{2id}	β_∞
Gleichdruckgitter	102,5°	77,5°	90°
Beschleunigungsgitter. . .	60°	35°	45°
Verzögerungsgitter	35°	60°	45°

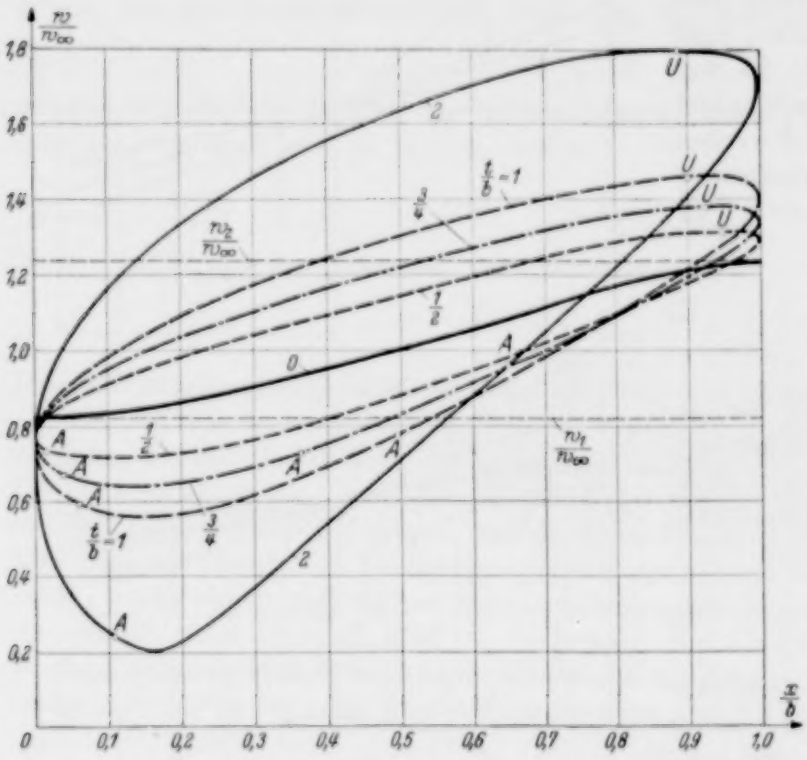


Abb. 9. Potentialtheoretische Geschwindigkeit an der Kontur der Gitterschaufel für verschiedene Teilungsverhältnisse t/b. Schaufelformen nach Abb. 13. Bei Strömung von links nach rechts, Beschleunigungsgitter mit $\beta_1 = 60°$; $\beta_{2id} = 35°$; von rechts nach links, Verzögerungsgitter mit $\beta_1 = 35°$; $\beta_{2id} = 60°$.

U = Umschlagspunkt laminar-turbulent, angenommen im Druckminimum = Geschwindigkeitsmaximum.
A = turbulenter Ablösungspunkt beim Verzögerungsgitter.
$t/b = 0$ ist die „Stromfaden-Theorie" (schaufelkongruente Strömung).

Dies entspricht beim Beschleunigungsgitter einem Geschwindigkeitsverhältnis $w_2/w_1 = 1{,}51$, und einem auf den Durchsatz bezogenen Druckgefälle nach (11) von

$$\frac{p_1 - p_2}{\frac{\varrho}{2} w_{x_\infty}^2} = \frac{1}{\sin^2\beta_2} - \frac{1}{\sin^2\beta_1} = 1{,}72 .$$

Damit ergibt sich für das Beschleunigungs- und das Verzögerungsgitter die Konstante C nach (58) zu $C \cdot \pi = 1{,}70$, und für den Auftriebsbeiwert hat man aus (59):

$$\zeta_a = 1{,}20 \frac{t}{l} = 0{,}85 \frac{t}{b} . \qquad (60)$$

Die nach dem in Abschnitt 4 angegebenen Verfahren ermittelte potential-theoretische Geschwindigkeitsverteilung ist für Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter in Abb. 9 angegeben. Strömung von links nach rechts bedeutet Beschleunigungsgitter, von rechts nach links Verzögerungsgitter. Die zugehörigen Schaufelkonturen sind nicht völlig identisch mit denen in Abb. 8, die für ein Gleichdruckgitter (Staffelungswinkel der Schaufelsehne gegen die Gitterfront $\beta_s = 90°$) gelten. Durch die Hinzunahme der Geschwindigkeitskomponente w_{y_∞} wird die Schaufelkontur gedreht ($\operatorname{ctg}\beta_s = w_{y_\infty}/w_{x_\infty}$), wobei eine Streckung der Sehne erfolgt, da die Gitterbreite b erhalten bleiben muß. Wölbung und Wölbungsrücklage erfahren hierdurch eine Änderung gegenüber dem Fall des Gleichdruckgitters. Die geometrischen Parameter der untersuchten Gitter sind in der Tabelle 2 zusammengestellt ($x = 0$: Schaufeleintrittskante).

Für die Schaufelgitter mit $t/b = 3/4$ und 1 ist die Schaufelform und die Druckverteilung auf der Schaufelkontur in Abb. 10 und 11 dargestellt.

b) Grenzschichtrechnung: Der zweite Teil der Untersuchung besteht in der Ausführung der Grenzschichtrechnung für beide Seiten der Schaufelkontur. Für die laminare Grenzschicht wurde das Näherungsverfahren von *K. Pohlhausen* und für die turbulente Grenzschicht das-

Tabelle 2. Geometrische Parameter der untersuchten Schaufelgitter vgl. Abb. 13[1].

Gitter		Teilung		Wölbung	Wölbungsrücklage	Eintrittswinkel	Austrittswinkel	Staffelungswinkel	Winkelübertreibung	
									Eintritt	Austritt
Nr. des Gitters nach Bild 13	Art	t/b	t/l	f/l	x_f/l	β_1	β_2	β_s	$\nu_1=\beta_1^*-\beta_1$	$\nu_2=\beta_2^*-\beta_2$
(1)	Gleichdruck	0,5	0,5	0,07	0,50	102,5°	77,5°	90°	— 2,8°	+ 2,8°
(2)		0,75	0,75	0,08	0,50	102,5°	77,5°	90°	— 5,7°	+ 5,7°
(3)		1,0	1,0	0,09	0,50	102,5°	77,5°	90°	— 8,2°	+ 8,2°
(4)	Beschleunigung	0,5	0,35	0,07	0,43	60°	35°	45°	+ 2,0°	— 1,8°
(5)		1,0	0,71	0,09	0,41	60°	35°	45°	+14,2°	— 4,9°
(6)		2,0	1,41	0,15	0,35	60°	35°	45°	+40,7°	—24,5°
(7)	Verzögerung	0,5	0,35	0,07	0,57	35°	60°	45°	— 2,0°	+ 1,8°
(8)		0,75	0,53	0,08	0,58	35°	60°	45°	— 8,1°	+ 3,0°

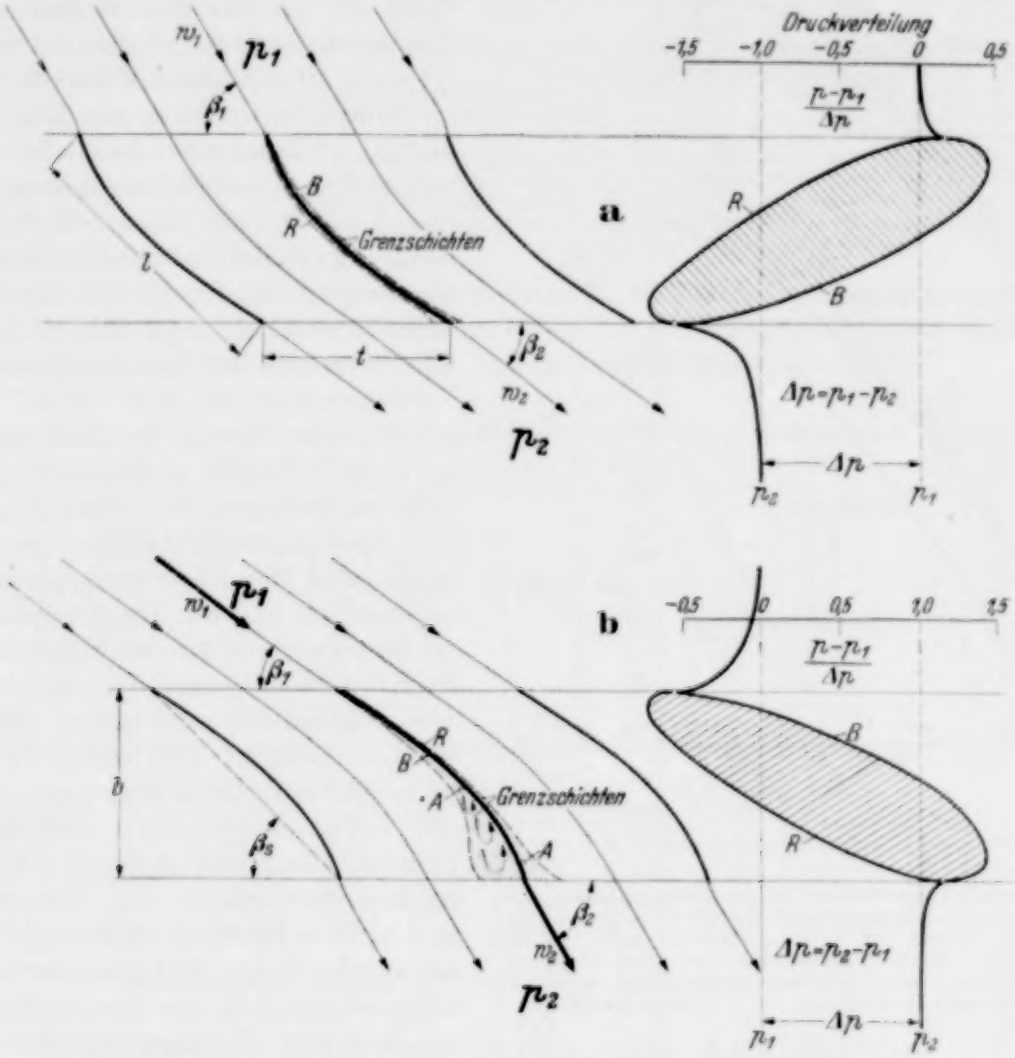


Abb. 10. Druckverteilung und Verlauf der Grenzschicht an der Schaufel eines a) Beschleunigungsgitters (Turbine). b) Verzögerungsgitters (Verdichter). Teilung $t/b = 1$; $\beta_s = 45°$; Reynolds Zahl $Re = w_\infty l/\nu = 10^6$; stoßfreier Eintritt. Beschleunigungsgitter: $\beta_1 = 60°$; $\beta_{2id} = 35°$; $w_2/w_1 = 1{,}51$ Verzögerungsgitter: $\beta_1 = 35°$; $\beta_{2id} = 60°$; $w_2/w_1 = 1/1{,}51 = 0{,}66$ B = Bauchseite; R = Rückenseite. An der Schaufel des Beschleunigungsgitters ist die Reibungsschicht wegen des starken Druckabfalles sehr dünn; Ablösung tritt nicht ein. Beim Verzögerungsgitter gibt der starke Druckanstieg eine sehr dicke Reibungsschicht mit Ablösung auf beiden Seiten der Schaufel (A = Ablösungsstelle), und infolgedessen wesentlich größere Strömungsverluste.

jenige von *E. Gruschwitz* verwendet[2]. Für sämtliche Rechnungen wurde die *Reynolds*sche Zahl

$$Re = \frac{w_\infty l}{\nu} = 10^6$$

[1] Der Winkel β^* der Schaufel am Eintritt bzw. Austritt errechnet sich für beliebige Anströmung aus $\operatorname{ctg}\beta^* = w_y/w_{x\infty} + \operatorname{ctg}\beta_\infty$.

[2] Vgl. Fußnote 3 von S. 52. In beiden Fällen konnte von einer rechnerischen Vereinfachung von *E. Truckenbrodt*, Bericht 45/9 des Instituts für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig (noch nicht veröffentlicht), vorteilhaft Gebrauch gemacht werden. Vgl. *H. Schlichting*, Grenzschicht-Theorie, Kap. 12 und 22.

gewählt. Eine gewisse Unsicherheit bei der Durchführung der Grenzschichtrechnung rührt von der Wahl des Umschlagpunktes laminar-turbulent her. Wir haben die Annahme getroffen, daß der Umschlagspunkt im Geschwindigkeitsmaximum liegt, was nach Untersuchungen von *H. Schlichting* und *A. Ulrich*[1] für größere *Re*-Zahlen recht gut zutrifft. Damit ergeben sich die in Abb. 9 eingetragenen Umschlagspunkte. Die Grenzschichtrechnung liefert den Verlauf der Grenzschichtgrößen Impulsdicke ϑ und Verdrängungsdicke δ^* längs Saug- und Druckseite der Schaufelkontur, ferner für jede Stelle längs der Wand einen Formparameter des Grenzschicht-Geschwindigkeitsprofiles, welcher die Neigung zur Ablösung charakterisiert.

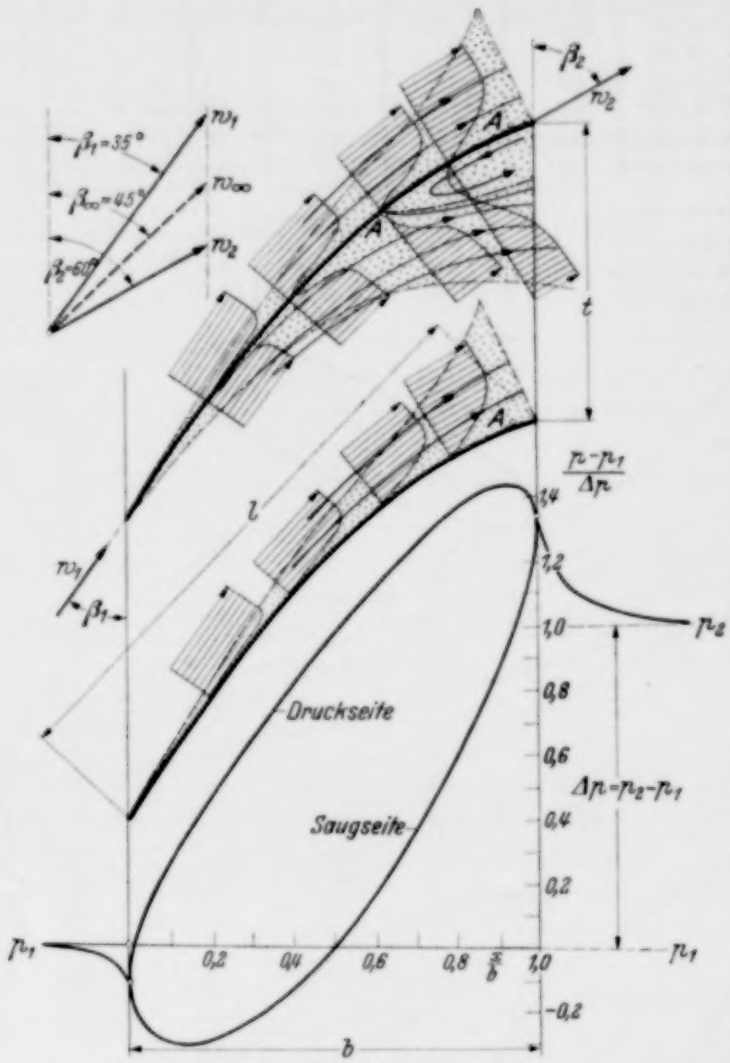


Abb. 11. Geschwindigkeitsverteilung in der Reibungsschicht und Druckverteilung an der Gitterschaufel für ein Verzögerungsgitter mit der Teilung $t/b = 3/4$. $t/l = 0{,}53$; $w_2/w_1 = 0{,}66$; $Re = w_\infty\, l/\nu = 10^6$. Die Grenzschichtdicke ist 5fach überhöht. Infolge des starken Druckanstieges kommt die Strömung auf beiden Seiten der Schaufel zur Ablösung. (A = Ablösungsstelle.)

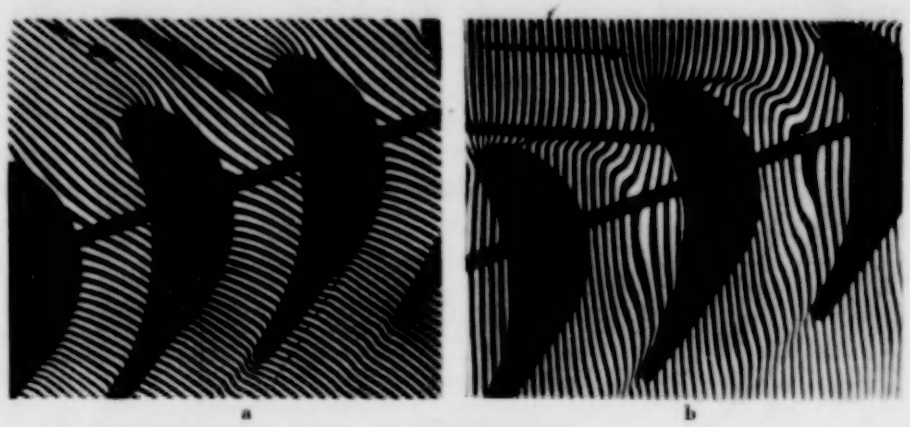
Auf die Wiedergabe der Einzelheiten der Grenzschichtrechnung kann hier verzichtet werden. Für die anschließende Berechnung der Gitterverlustbeiwerte benötigt man aus der Grenzschichtrechnung lediglich die Werte von Impulsverlustdicke ϑ_H und Verdrängungsdicke δ_H^* an der Schaufelhinterkante. Die dimensionslosen Werte dieser Größen [Θ und Δ^* nach (36a, b)] sind in Tabelle 3 angegeben.

Sämtliche untersuchten Beschleunigungs- und Gleichdruckgitter haben keine Ablösung, während man in den Verzögerungsgittern mit $t/b = 1$ und 3/4 vor allem auf der Druckseite Ablösung erhält. Auf die Berechnung des Verzögerungsgitters für die Teilung $t/b = 2$ wurde deshalb verzichtet. In Abb. 10 ist der Grenzschichtverlauf für das Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter mit $t/b = 1$ gegenübergestellt. Die Grenze der Reibungsschicht ist an einer Schaufel maßstäblich (nicht überhöht) eingetragen. Der starke Unterschied in den Reibungsschichtdicken beim Verzögerungs- und Beschleunigungsgitter tritt hierbei deutlich hervor. Die Ursache hierfür ist im Druckverlauf an der Schaufel zu sehen. Beim Beschleunigungsgitter ist fast ausschließlich Druckabfall vorhanden. Hierbei bleibt die Grenzschicht sehr dünn, und Ablösung tritt nicht auf. Beim Verzögerungsgitter muß die Grenzschicht fast ausschließlich im Druckanstieggebiet strömen. Dies gibt ein starkes Anwachsen der Grenzschichtdicke und u. U. schließlich Ablösung. Abb. 11 soll ein anschauliches Bild von der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer Schaufel am Verzögerungsgitter $t/b = 3/4$ geben. Die verzögerte Potentialgeschwindigkeit mit starkem Druckanstieg bedingt ein sehr starkes Anwachsen der Grenzschichtdicke stromabwärts und führt auf beiden Seiten der Schaufel zur Ablösung und Rückströmung an der Wand[2].

[1] *H. Schlichting* und *A. Ulrich*, Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent. Jb. 1942 dtsch. Luftf.-Forschg., S. I 8; vgl. auch *H. Schlichting*, Forschg. Ing.-Wes. 16 S. 65, (1950).

[2] In Abb. 10 und 11 ist auffällig, daß beim Verzögerungsgitter der Ablösungspunkt auf der Bauchseite (Druckseite) weiter vorn liegt als auf der Rückenseite (Saugseite), was mit der Erfahrung nicht recht übereinzustimmen scheint. Hierzu möge folgendes bemerkt werden: Der Systematik halber wurden Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter mit dem gleichen Druckgefälle $\Delta p/\varrho/2 \cdot w^2_{x_\infty} = 1{,}7$ gerechnet. Für ein Beschleunigungsgitter ist dieser Betrag durchaus normal, jedoch für ein Verzögerungsgitter reichlich groß. Die hier gewählte elliptische Zirkulationsverteilung über die Tiefe gibt für die Vermeidung der Ablösung keineswegs eine besonders günstige Schaufelform, wie man aus der Druckverteilung in Abb. 10 und 11 erkennt. Der stoßfreie Eintritt liefert auf der Bauchseite ganz vorn sofort einen steilen Druckanstieg. Dies gibt schon vorn große Grenzschichtdicken, die dann bald zur Ablösung führen. Auf der Rückenseite dagegen hat man ganz vorn einen schwachen Druckabfall und danach zunächst einen sanften und später einen steileren Druckanstieg. Infolgedessen bleibt hier die Grenzschichtdicke geringer als auf der Bauch-

Dieses charakteristische verschiedenartige Verhalten der Reibungsschicht im Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter wird auch durch Strömungs-Photographien in Abb. 12 bestätigt. Auf diesen Strömungsaufnahmen nach dem Interferenzverfahren zeigen die Streifenverschiebungen den Dichteunterschied gegenüber der ungestörten Strömung an. Die Grenzschicht wird durch ein sehr plötzliches Abknicken der Streifen angezeigt, da dort durch die innere Reibung größere Temperaturunterschiede und damit größere Dichteänderungen als in der übrigen Strömung auftreten. Die Ablösung ist als starke Verdickung der Grenzschicht zu erkennen. Bei der Schaufel im Turbinengitter (Abb. 12a) tritt auf der Bauchseite überhaupt keine Ablösung auf, dagegen auf der Rückseite in der Nähe der Hinterkante eine schwache Ablösung, die durch eine gestrichelte Linie angedeutet ist. Im Gegensatz dazu zeigt das Pumpengitter (Abb. 12b) schon in der Nähe der Schaufelnase auf der Rückenseite eine starke Ablösung, die ein Totwasser verursacht, das etwa den halben Schaufelkanal ausfüllt.



a b

Abb. 12. Strömungsaufnahmen an Schaufeln im Gitterverband, nach der Interferenzstreifenmethode (nach *E. Eckert*).
(a) Beschleunigungsgitter (Druckabfall): $\beta_1 = 48°$; $t/l = 0{,}524$; $Re = 1{,}59 \cdot 10^6$.
(b) Verzögerungsgitter (Druckanstieg): $\beta_1 = 20°$; $t/l = 0{,}64$; $Re = 1{,}97 \cdot 10^6$.
Die Pfeile geben die Zuströmungsrichtung an. Der Rand der Grenzschicht ist durch ein plötzliches Abknicken der Streifen zu erkennen. Bei der Schaufel im Beschleunigungsgitter, (a), (Turbine) auf der Bauchseite keine Ablösung, auf der Rückenseite schwache Ablösung nahe der Hinterkante (gestrichelte Gerade). Bei der Schaufel des Verzögerungsgitters, (b), (Pumpe) auf der Rückenseite sehr starke Ablösung unmittelbar an der Schaufelnase.

Tabelle 3. Ergebnisse der Berechnung der Verlustbeiwerte für Gitter verschiedenen Teilungsverhältnisses. $|\beta_1 - \beta_{2id}| = 25°$, vgl. Abb. 13 und 14. $Re = 10^6$.

Nr. des Gitters nach Bild 13	Teilung / Gitterbreite	Teilung / Schaufelsehne	Schaufeldicke / Schaufelsehne	$\Delta = \frac{\varrho}{2} w_2^2 \cdot l$	$\frac{\delta^*_{Hob} + \delta^*_{Hunt}}{t \cdot \sin\beta_{2id}} = \Delta^*$	$\frac{\vartheta_{Hob} + \vartheta_{Hunt}}{t \cdot \sin\beta_{2id}} = \Theta$	$\frac{\Delta p_g}{\frac{\varrho}{2} w_{2\infty}^2} = \zeta_g$	$= \lvert 1 - \sin^2\beta_{2id}\,\zeta_g$	$W = \zeta_w \cdot \frac{\varrho}{2} w_2^2 \cdot t$	Abströmwinkel mit Verlusten	$= \frac{t'}{s'}$	$\eta_T = \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tg}\beta_\infty}{1 + \varepsilon \operatorname{ctg}\beta_\infty}$ Gl. (53)	$= \frac{1}{1 + \sin^2\beta_{2id}\,\zeta_g}$
	t/b	t/l	s_H/l	ζ_a	$10^3 \cdot \Delta^*$	$10^3 \cdot \Theta$	ζ_g	V	$100\,\zeta_w$	β_2	$1/\varepsilon$	η_T; P	η_g
	Gleichdruckgitter: $\beta_1 = 102{,}5°$; $\beta_{2id} = 77{,}5°$; $w_2/w_1 = 1$												
	0 028	0,028	0	0.025	199.2	139.3	0,554	0,686	1,55	77,3°	16	—	0,654
(1)	0,5	0,5	0	0.443	10,6	7,41	0,018	0,991	0,910	77,5°	49	—	0,983
(2)	0,75	0,75	0	0.664	6.85	4.68	0,012	0.994	0,876	77,5°	76	—	0,989
(3)	1	1	0	0.887	5,36	3.55	0,009	0,995	0,913	77,5°	97	—	0,992
(1)	0,5	0,5	0,02	0,443	51,7	7,41	0,019	0,991	0,973	76,6°	45	—	0,981
	Beschleunigungsgitter: $\beta_1 = 60°$; $\beta_{2id} = 35°$; $w_2/w_1 = 1{,}51$												
	0,027	0,019	0	0,023	200	138	1,504	0,711	1,011	34,1°	23	0,394	0,670
(4)	0,50	0,354	0	0,426	7,0	6,4	0,039	0,993	0,489	35,0°	87	0,975	0,987
(5)	1,00	0,707	0	0,851	3,1	2,7	0,017	0,996	0,425	35,0°	200	0,990	0,995
(6)	2,00	1,414	0	1,702	1,2	1,1	0,007	0,999	0,352	35,0°	483	0,996	0,998
(4)	0,50	0,354	0,02	0,426	77,0	6,4	0,055	0,991	0,690	33,0°	62	0,969	0,982
	Verzögerungsgitter: $\beta_1 = 35°$; $\beta_{2id} = 60°$; $w_2/w_1 = 0{,}66$												
	0,120	0,085	0	0,102	200	132	0,635	0,725	1,91	58,9°	5,2	0,680	0,677
(7)	0,50	0,354	0	0,426	76,7	40,7	0,136	0,948	1,70	59,1°	25,0	0,923	0,906
(8)	0,75	0,530	0	0,638	100,6	43,7	0,159	0,939	2,98	58,6°	21,4	0,913	0,894
(7)	0,50	0,354	0,02	0,426	130,0	40,7	0,170	0,934	2,13	57,4°	20,0	0,905	0,887

seite, und es tritt deshalb die Ablösung dann erst weiter hinten ein. Das soeben Gesagte ergibt sich sehr deutlich aus dem Verlauf der Grenzschichtdicken längs der Schaufelkontur, der hier nicht mitgeteilt wurde.

Durch leichte Abänderung der Schaufelkontur in der Nähe der Eintrittskante (Verdickung des Schaufelkopfes) läßt sich leicht eine Schaufelform erhalten, die bezüglich der Ablösung günstiger ist als die hier untersuchte. Die „Züchtung" solcher günstiger Schaufelformen, wobei auch die Stoßempfindlichkeit (Änderung der Verluste mit dem Zuströmwinkel) zu berücksichtigen ist, war jedoch nicht Zweck der vorliegenden ersten orientierenden Rechnungen. Sie bleibt späteren Untersuchungen vorbehalten.

c) Die Gitterverlustbeiwerte. Der dritte und letzte Abschnitt der Untersuchung besteht nun in der Ermittlung der Verlustbeiwerte. Die Grenzschichtrechnung liefert die Impulsverlustdicke ϑ_H und die Verdrängungsdicke δ_H^* an der Schaufelhinterkante. Hieraus erhält man die dimensionslosen Werte Θ und Δ^* nach (36a, b). Damit können dann die Verlustbeiwerte ζ_g, ψ, ζ_w, $\eta_{T,P}$ und η_{ig} nach (47), (49), (50), (53) und (55) ohne weiteres ausgerechnet werden. In Tabelle 3 sind die Ergebnisse dieser Rechnung zusammengestellt. Für das Teilungsverhältnis $t/b = 1/2$ wurde neben der unendlich dünnen Schaufel ($s_H = 0$) auch noch der Fall einer endlich dicken Hinterkante mit $s_H/l = 0{,}02$ durchgerechnet. Dies bedingt eine Vergrößerung der Verdrängungsdicke an der Hinterkante um s_H, was neben höheren Verlusten vor allem verkleinerte Abströmwinkel β_2 bringt. Um das Verhalten der Verlustbeiwerte bei sehr kleiner Teilung zu erkennen, wurden für die drei Gitterarten noch je ein extrem kleines t/b gerechnet, und zwar wurde dafür in (56) das Gleichheitszeichen gewählt.

In Abb. 13 ist der Verlustbeiwert ζ_g über der Gitterteilung t/l aufgetragen. Dabei möge bedacht werden, daß sämtliche Schaufelgitter so gewählt worden sind, daß sie gleichen Zuströmwinkel und gleiche Ablenkung mit

$$\Delta\beta = |\beta_1 - \beta_{2\,id}| = 25°$$

besitzen. Bei kleiner Teilung t/l ist deshalb die Auftriebsbelastung der einzelnen Schaufel gering, dagegen bei großer Teilung hoch. Die nach (60) errechneten ζ_a-Werte sind in Abb. 13 mit angegeben. Der Verlauf des Gitterverlustbeiwertes ζ_g in Abhängigkeit von der Teilung t/l zeigt einen charakteristischen Unterschied für die Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter: Für sehr kleine t/l steigt ζ_g für alle drei Arten von Gittern stark an,

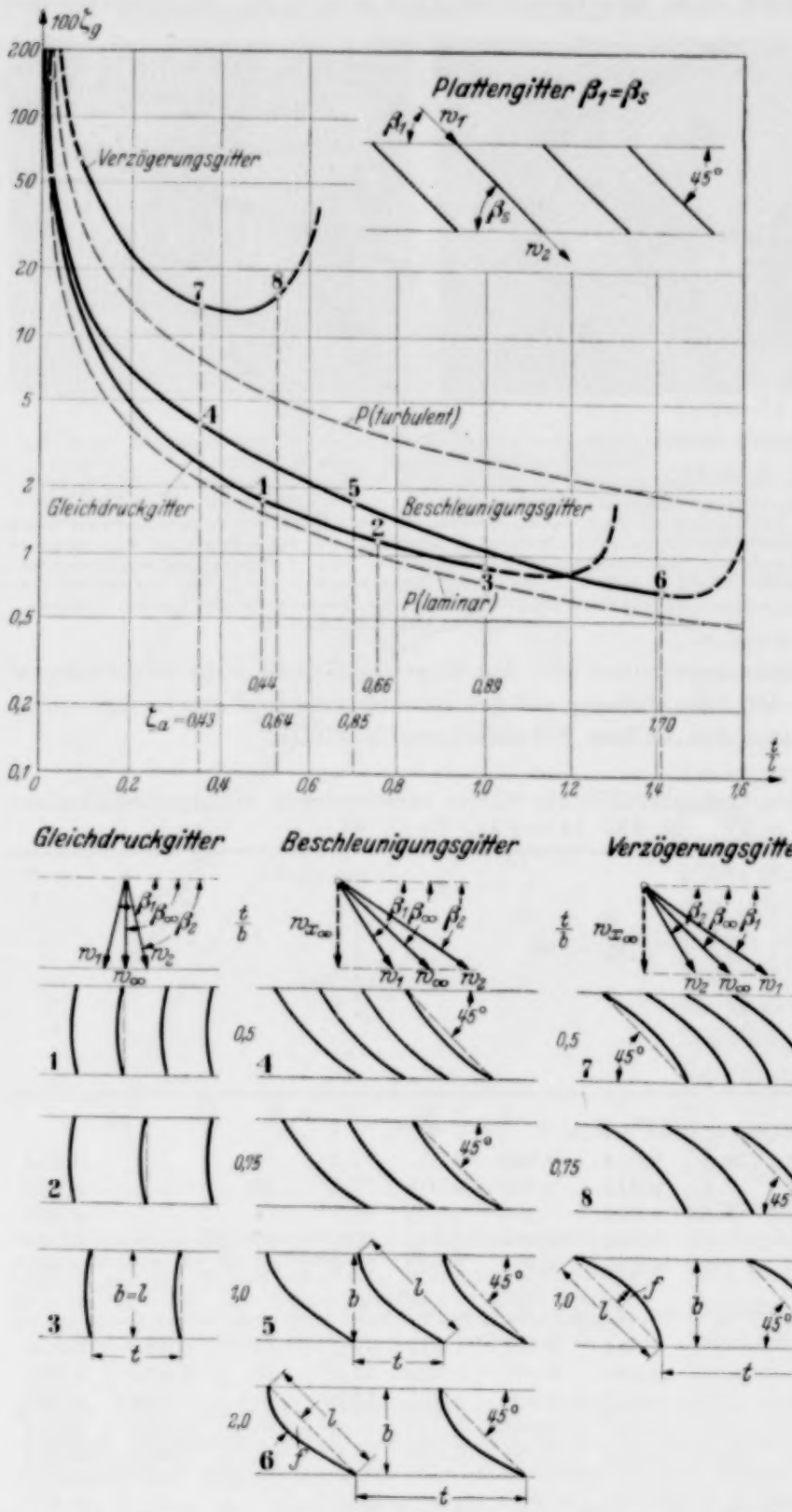


Abb. 13. Theoretisch ermittelte Verlustbeiwerte ζ_g von ebenen Schaufelgittern mit verschiedenem Teilungsverhältnis t/l.

$\zeta_g = \dfrac{\Delta g}{\frac{\varrho}{2} w_{x\infty}^2}$ = Verlustbeiwert nach Gleichung (46).

$\Delta g = g_1 - g_2$ = Differenz der Gesamtdrücke vor und weit hinter dem Gitter (Energieverlust infolge Reibung).
$w_{x\infty}$ = achsiale Geschwindigkeitskomponente. P = Plattengitter.
Sämtliche Gitter sind so ausgelegt, daß sie bei verlustloser Strömung gleiche Geschwindigkeitsdreiecke haben mit der Ablenkung $\Delta\beta = 25°$.
Staffelungswinkel $\beta_s = 45°$; Reynolds-Zahl $Re = w_\infty\, l/\nu = 10^6$.

Auftriebsbeiwert $\zeta_a = A/l \dfrac{\varrho}{2} w_\infty^2 = 1{,}20\, t/l$.

Weitere Daten der Gitter nach Tabelle 2.

was einfach daher rührt, daß bei sehr enger Schaufelstellung die Reibungsverluste wegen der großen Schaufelzahl sehr groß werden. Für die Verzögerungsgitter sind die Verlustbeiwerte durchweg wesentlich größer als für die Gleichdruck- und Beschleunigungsgitter, in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung. Dies rührt daher, daß der Druckanstieg im Verzögerungsgitter für die Grenzschicht wesentlich größere Verluste zur Folge hat als der Druckabfall im Beschleunigungsgitter. Daß das Gleichdruckgitter noch etwas günstiger als das Beschleunigungsgitter liegt, kommt daher, daß der Durchsatz pro Längeneinheit des Gitters beim Gleichdruckgitter ein Maximum hat, wenn man Gitter mit gleichem w_∞ vergleicht. Da ζ_g ein auf den Durchsatz bezogener Beiwert ist, liegt das Gleichdruckgitter hierbei besonders günstig. Bezüglich des Wirkungsgrades η_g dagegen (Abb. 14) tritt dieser Vorteil des Gleichdruckgitters nicht in Erscheinung. Mit wachsender Teilung tritt bei allen drei Arten von Gittern in Abb. 13 bei größeren t/l ein Wiederanstieg von ζ_g ein, und zwar beim Verzögerungsgitter schon bei wesentlich kleinerer Teilung als beim Beschleunigungsgitter. Das Wiederansteigen von ζ_g mit wachsendem t/l ist eine Folge davon, daß bei großer Auftriebsbelastung an der einzelnen Schaufel Ablösungserscheinungen auftreten, verursacht durch örtliche starke Druckanstiege. Das günstigste Teilungsverhältnis t/l (Minimum der ζ_g-Kurve) ist somit für das Verzögerungsgitter wesentlich kleiner als für das Beschleunigungsgitter. Darüber hinaus ist der optimale t/l-Bereich beim Verzögerungsgitter wesentlich schmäler als beim Beschleunigungsgitter. Beim Verzögerungsgitter kommt es deswegen viel mehr auf die richtige Wahl des Teilungsverhältnisses an als beim Beschleunigungsgitter.

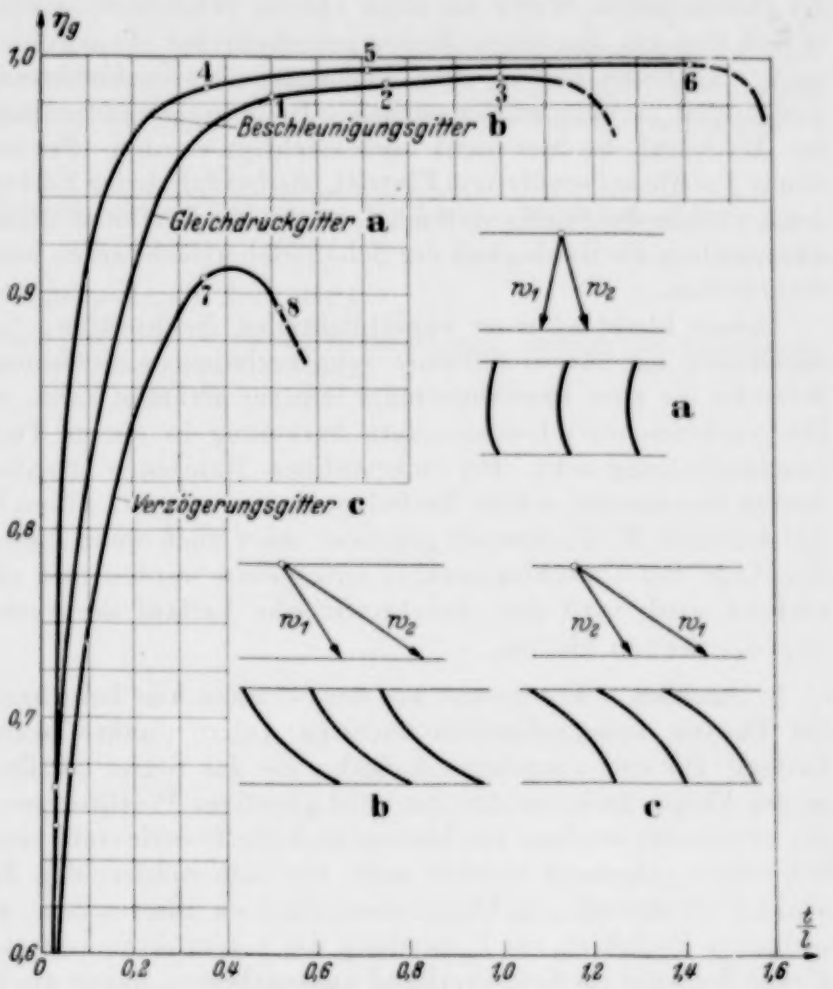


Abb. 14. Theoretisch ermittelte Gitterwirkungsgrade für die ebenen Schaufelgitter von Abb. 13.
$\eta_g = \frac{E_2}{E_1} = 1 - \frac{\Delta g}{p_1 + q_1}$ nach Gleichung (55).

Zum Vergleich sind in Abb. 13 auch noch die Verlustbeiwerte für ein aus ebenen Platten bestehendes Gitter eingetragen, bei welchem der Zuströmwinkel β_1 gleich dem Staffelungswinkel β_s ist, so daß in reibungsloser Strömung keine Ablenkung vorhanden ist. Der Verlustbeiwert ζ_g kann nach (50) aus dem Widerstandsbeiwert ζ_w ermittelt werden, der für die längsangeströmte ebene Platte bekannt ist. Er hängt nur von der *Reynolds*schen Zahl ab, und zwar gilt mit $Re = w_\infty l/\nu$:

$$\text{laminar:} \qquad \zeta_w = \frac{2{,}66}{\sqrt{Re}}, \tag{61a}$$

$$\text{turbulent:} \qquad \zeta_w = \frac{0{,}148}{\sqrt[5]{Re}}. \tag{61b}$$

Damit wird der Verlustbeiwert des Plattengitters mit $\beta_1 = \beta_s$ nach Gl. (50):

$$\text{laminar:} \quad \zeta_g = \frac{2{,}66}{\sqrt{Re}\sin^3\beta_\infty}\frac{l}{t}, \tag{62a}$$

$$\text{turbulent:} \quad \zeta_g = \frac{0{,}148}{\sqrt[5]{Re}\sin^3\beta_\infty}\frac{l}{t}. \tag{62b}$$

Die hiernach für $\beta_\infty = 45°$ und $Re = 10^6$ errechneten Kurven sind in Abb. 13 mit eingetragen.

Die Beschleunigungsgitter und Gleichdruckgitter liegen, wie zu erwarten, zwischen dem laminaren und turbulenten Plattengitter, während das Verzögerungsgitter größere Verlustbeiwerte hat als das turbulente Plattengitter.

Abb. 14 gibt den Verlauf des Gitterwirkungsgrades η_g, wie er nach (54) eingeführt wurde, in Abhängigkeit vom Teilungsverhältnis t/l. Wie wir bereits erwähnten, ist η_g für den Vergleich der drei charakteristischen Gitterarten Beschleunigung, Gleichdruck, Verzögerung besonders geeignet, was sich durch diese Auftragung bestätigt. Das Gleichdruckgitter liegt mit seinem Wirkungsgrad zwischen Beschleunigungs- und Verzögerungsgitter.

Ein Vergleich der hier theoretisch ermittelten Verlustzahlen, insbesondere von η_T und η_Δ für Beschleunigungsgitter (Tabelle 3), mit den in der Praxis üblicherweise angenommenen mag die theoretischen Werte als allzu günstig erscheinen lassen. Dazu möge bedacht werden, daß es sich hier um die reinen Reibungsverluste des ebenen Gitters handelt, während in der Praxis noch mancherlei andere, den Wirkungsgrad verschlechternde Einflüsse vorhanden sind. Dies sind einmal Verluste an den seitlichen Begrenzungen (dreidimensionale Strömung) sowie Einflüsse der *Mach*zahl, die hier nicht berücksichtigt wurden. Ferner handelt es sich hier um unendlich dünne Profile bei stoßfreiem Eintritt, die bezüglich der Verluste besonders günstig liegen dürften. Auch wird in der Praxis vielfach die Schaufeloberfläche nicht als hydraulisch glatt anzusprechen sein, sondern die Rauhigkeit der Schaufeloberfläche einen beträchtlichen zusätzlichen Widerstand verursachen.

Ferner bleibt es einer experimentellen Nachprüfung vorbehalten, ob auch in Strömungsmaschinen mit ihrem teilweise sehr turbulenten Strömungszustand die Grenzschicht an der Schaufel bis zum Druckminimum laminar strömen kann, wie sie es beim Einzeltragflügel tut. Die vorherrschend beschleunigte Strömung in einem Turbinengitter begünstigt an sich die Laminarhaltung sehr. Bei mehrstufigen Maschinen arbeitet aber die von den vorhergehenden Stufen verursachte starke Turbulenz dem entgegen. Einen beachtlichen Beitrag zu dieser Frage hat kürzlich *W. T. Sawyer*[1] gegeben. Aber auch wenn die hier gemachten Annahmen bezüglich der Lage des Umschlagpunktes aufgegeben werden und etwa die Schaufel voll turbulent gerechnet wird, wird der charakteristische Verlauf der Verlustbeiwerte, wie ihn Abb. 13 und 14 zeigen, erhalten bleiben.

9. Ausblick. Wie bereits aus den wenigen hier berechneten Beispielen zu ersehen ist, liefert die Theorie außerordentlich wichtige Anhaltspunkte bezüglich der Wahl eines „günstigsten Gitters" für eine vorgelegte Aufgabe, die das Gitter erfüllen soll. Die großen Erfahrungen, die in der Flugtechnik bei der Auswahl günstiger Profilformen gesammelt wurden, können hierbei mit verwendet werden. Die hier entwickelte Theorie stellt einen ersten Anfang dar, der noch erheblich weiter ausgebaut werden muß. Um insbesondere den Einfluß einer Änderung des Zuströmwinkels (Stoßempfindlichkeit) theoretisch zu untersuchen, wird es nötig sein, bequeme und zuverlässige Verfahren zur Ermittlung der potentialtheoretischen Geschwindigkeit an einer endlich dicken Schaufel im Gitterverband auszuarbeiten, damit auch der Fall des „nichtstoßfreien" Eintritts behandelt werden kann. Die Berücksichtigung des Einflusses der *Mach*zahl auf die potentialtheoretische Druckverteilung sowie auf die Grenzschicht bleibt ebenfalls noch offen. Systematische Rechnungen von der hier geschilderten Art, bei denen die geometrischen Parameter des Gitters: Profilform, Teilungsverhältnis und Staffelungswinkel, sowie der Anstellwinkel und der Umlenkungswinkel zu variieren sind, liefern dann das für einen vorgegebenen Verwendungszweck „günstigste Gitter". Die Übertragung des Verfahrens auf das Radialgitter dürfte ebenfalls möglich sein, wobei die Hauptschwierigkeiten immer in der zuverlässigen Ermittlung der Potentialgeschwindigkeit liegen. Weitere wichtige Einflüsse ergeben sich bei einem axial durchströmten rotationssymmetrischen ruhenden Gitter (Leitrad) aus dem radialen Druckgefälle sowie darüber hinaus beim umlaufenden Rad aus der Wirkung der Zentrifugalkräfte auf die Grenzschicht.

10. Zusammenfassung. Es wird ein Rechenverfahren angegeben für die theoretische Ermittlung der Strömungsverluste eines ebenen Schaufelgitters in inkompressibler Strömung. Diese Aufgabe zerfällt in die folgenden drei Teilaufgaben:

1. Ermittlung der Druckverteilung an der Schaufel in reibungsloser Strömung; 2. Berechnung der Grenzschicht längs der Schaufelkontur; 3. Berechnung der Nachlaufströmung hinter der Schaufel.

[1] *W. T. Sawyer*, Experimental Investigation of a Stationary Cascade of Aerodynamic Profiles. Mitt. des Institutes für Aerodynamik der E. T. H. Zürich, Heft Nr. 17 (1949).

Für die Lösung der ersten Teilaufgabe wird ein bequemes Verfahren mitgeteilt, das eine Verallgemeinerung der *Glauert*schen Theorie der dünnen Profile darstellt. Der Arbeitsaufwand zur Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung und der Schaufelkontur beträgt für ein Gitter und für einen Zuströmwinkel etwa drei Stunden.

Die Kenntnis der potentialtheoretischen Geschwindigkeitsverteilung ermöglicht die Durchführung einer Grenzschichtrechnung längs der Schaufelkontur, wobei die Grenzschichtgrößen an der Hinterkante der Schaufel erhalten werden. Die Berechung des Energieverlustes im Gitter sowie die Änderung der Austrittsströmung gegenüber der reibungsfreien Strömung wird auf die Grenzschichtgrößen an der Schaufelhinterkante zurückgeführt. Der Arbeitsaufwand für diese Ermittlung einschließlich der Grenzschichtrechnung beträgt ebenfalls etwa drei Stunden pro Gitter und pro Anstellwinkel.

An einigen Beispielen von Verzögerungs-, Beschleunigungs- und Gleichdruckgittern wird die Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung und der Verlustgrößen durchgeführt. Dabei zeigt sich der entscheidende Vorteil des Beschleunigungsgitters gegenüber dem Verzögerungsgitter in wesentlich geringeren Verlustbeiwerten.

[Aus dem Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig.]

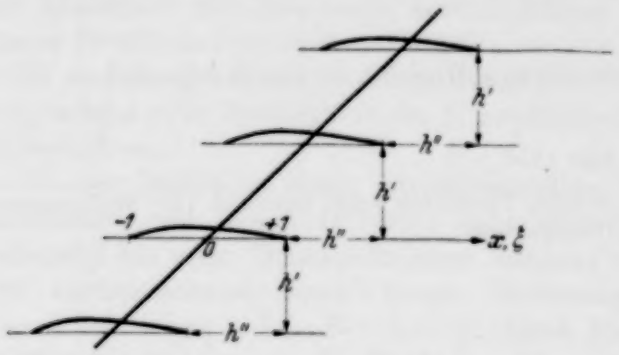
(Eingegangen am 1. Juli 1950.)

Anschrift der Verfasser: Prof. *H. Schlichting* und Dr. *N. Scholz*, Braunschweig, Institut für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule.

Strenge Lösung der Integralgleichung für die Strömung durch ein senkrechtes Flügelgitter.

Von J. Dörr.

1. Aufgabenstellung. Ein regelmäßiges Gitter sehr dünner Flügel befinde sich in einem strömenden Medium. Das Profil aller Flügel sei gleich, und seine Skelettlinie weiche nur sehr wenig von der Profilsehne ab. Die Strömungsrichtung weit vor und weit hinter dem Gitter weiche nur sehr wenig von der Richtung der Profilsehnen ab. Mit der in der *Birnbaum*schen Theorie üblichen Linearisierung findet man dann für die Wirbelbelegung $\Gamma(x)$ und den Abwind $w(x)$ an der Skelettlinie der Flügel die Integralgleichung



$$w(x) = \int_{-1}^{+1} \Gamma(\xi)\, Re \left| \frac{1}{2h} \operatorname{Ctg} \frac{\pi(x-\xi)}{h} \right| d\xi$$

mit $h = h' + i h''$.

Wir werden zeigen, daß man diese Integralgleichung auf eine Form bringen kann, die in zwei Sonderfällen unmittelbar die Lösung durch den von *Betz* für den Einzelflügel angegebenen lösenden Kern erlaubt.

2. Transformation und Lösung einer verwandten Integralgleichung. Wir betrachten vorerst die Integralgleichung

$$f(x) = \frac{1}{2h} \int_{-1}^{+1} g(y) \operatorname{Ctg} \frac{\pi(x-y)}{h}\, dy\,. \tag{1}$$

Es ist

$$\operatorname{Ctg} \frac{\pi(x-y)}{h} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} \operatorname{Cof} \frac{\pi x}{h} + \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h} \operatorname{Cof} \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}\,. \tag{2}$$

Für die Funktionen g und f ist immer folgende Zerlegung möglich:

$$g(y) \equiv g_1(y) + g_2(y) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} g_1(y) \equiv -g_1(-y)\,, \\ g_2(y) \equiv g_2(-y)\,, \end{cases} \tag{3a}$$

$$f(x) \equiv f_1(x) + f_2(x) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} f_1(x) \equiv -f_1(-x)\,, \\ f_2(x) \equiv f_2(-x)\,. \end{cases} \tag{3b}$$

Dann kann man aber auf Grund der Eigenschaften des Kernes (2) die Integralgleichung (1) in folgende zwei Integralgleichungen aufspalten:

$$f_1(x) = \frac{1}{2h} \operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} \operatorname{Cof} \frac{\pi x}{h} \int_{-1}^{+1} \frac{g_2(y)}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}\, dy\,,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2h} \int_{-1}^{+1} \frac{g_1(y) \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h} \operatorname{Cof} \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}\, dy\,.$$

Dafür kann man auf Grund der Beziehungen (3a) und (3b) auch schreiben

$$f_1(x) = \frac{1}{2h} \operatorname{Cof} \frac{\pi x}{h} \int_{-1}^{+1} \frac{g_2(y)}{\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h}}\, dy\,, \tag{4a}$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2h} \int_{-1}^{+1} \frac{g_1(y) \operatorname{Cof} \frac{\pi y}{h}}{\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h}} \, dy \,. \tag{4b}$$

Wir betrachten nun als erstes den Sonderfall $h'' = 0$ und setzen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} = \varepsilon \eta \,, \qquad \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h} = \varepsilon \xi \\ \text{mit } \varepsilon = \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h} \,. \end{aligned}\right| \tag{5}$$

Da h wegen $h'' = 0$ reell ist, bildet sich durch diese Transformation die reelle Achse der y-Ebene auf die reelle Achse der ξ-Ebene ab.

Es sei ferner

$$f(x(\eta)) \equiv \varphi(\eta) \,, \qquad g(y(\xi)) \equiv \psi(\xi) \,. \tag{6a}$$

Dann ist

$$\varphi_1(\eta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \eta^2} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_2(\xi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \xi^2}\,(\eta - \xi)} \, d\xi \,, \tag{6b}$$

$$\varphi_2(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_1(\xi)}{\eta - \xi} \, d\xi \,. \tag{6c}$$

Damit haben unsere Integralgleichungen genau die Form, für die *Betz* den lösenden Kern angegeben hat. Man findet also als Lösungen von (6b) und (6c) unter der Voraussetzung, daß h reell ist,

$$\frac{\psi_2(\xi)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \xi^2}} = \frac{k}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_1(\eta) \sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \eta^2}\,(\eta - \xi)} \, d\eta \,,$$

$$\psi_1(\xi) = \frac{2}{\pi \sqrt{1 - \xi^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_2(\eta) \sqrt{1 - \eta^2}}{\eta - \xi} \, d\eta \,.$$

Ersetzt man jetzt wieder η und ξ nach (5) durch x und y, so erhält man

$$\frac{g_2(y)}{\operatorname{Cof} \frac{\pi y}{h}} = \frac{k \operatorname{Sin} \frac{\pi}{h}}{\pi \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}} + \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}} \int_{-1}^{+1} \frac{f_1(x) \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h}}}{\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h}} \, dx \,,$$

$$g_1(y) = \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}} \int_{-1}^{+1} \frac{f_2(x) \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h}}}{\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h}} \operatorname{Cof} \frac{\pi x}{h} \, dx \,.$$

Die letzte Relation kann man auch wie folgt schreiben:

$$g_1(y) = \frac{2}{h \sqrt{\ldots}} \int_{-1}^{+1} \frac{f_2(x) \left(\operatorname{Sin} \frac{\pi x}{h} + \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h} \right) \sqrt{\ldots}}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}} \operatorname{Cof} \frac{\pi x}{h} \, dx$$

$$= \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) \operatorname{Cof} \frac{\pi x}{h} \operatorname{Sin} \frac{\pi y}{h} \sqrt{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h}}}{\operatorname{Sin}^2 \frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin}^2 \frac{\pi y}{h}} \, dx \,.$$

Entsprechend folgt

$$g_2(y) = \frac{k \operatorname{Sin}\frac{\pi}{h} \operatorname{Cof}\frac{\pi y}{h}}{\pi \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi y}{h}}} + \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi y}{h}}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) \operatorname{Sin}\frac{\pi x}{h} \operatorname{Cof}\frac{\pi y}{h} \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi x}{h}}}{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi x}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi y}{h}} dx .$$

Die beiden Ausdrücke für g_1 und g_2 kann man jetzt aber zu einem einzigen zusammenziehen. Mit $g = g_1 + g_2$ erhält man

$$g(y) = \frac{k \operatorname{Sin}\frac{\pi}{h} \operatorname{Cof}\frac{\pi y}{h}}{\pi \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi y}{h}}} + \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi y}{h}}} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi x}{h}}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi(x-y)}{h}} dx . \tag{7}$$

Damit ist die allgemeine Lösung von (1) gefunden unter der Voraussetzung, daß h reell ist. Die Lösung ist nicht eindeutig, da k eine beliebige Konstante ist. Diese wird aber im Falle der Gitterströmung durch die Abflußbedingung festgelegt.

Man kann nun zeigen, daß (7) auch dann die Lösung von (1) ist, wenn h komplex ist, und zwar kann in $h = h' + ih''$ die Größe h'' beliebig sein, sofern $h' > 0$ ist. Sofern $h' = 0$ ist, muß hingegen $-1 > h'' > +1$ sein. Der Beweis hierzu erfordert einigen Aufwand und soll deshalb nicht gebracht werden.

3. Lösung der Integralgleichung des senkrechten Flügelgitters. Auf Grund der Tatsache, daß (7) die allgemeine Lösung der Integralgleichung (1) ist, läßt sich sofort für die Integralgleichung

$$w(x) = \int_{-1}^{+1} \Gamma'(\xi)\, Re \left| \frac{1}{2h} \operatorname{Ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{h} \right| d\xi$$

die Lösung angeben, wenn entweder $h'' = 0$ oder $h' = 0$ mit $-1 > h'' > 1$ ist. Der letzte Fall kennzeichnet ein waagerechtes Flügelgitter, das man als Grenzfall eines sehr schiefen Gitters auffassen kann. Dieser Grenzfall hat keine große technische Bedeutung. Von großer Wichtigkeit ist hingegen der Fall $h'' = 0$, der ein senkrecht zur Strömungsrichtung stehendes Flügelgitter kennzeichnet. Man erhält mit

$$h'' = 0$$

$$\Gamma'(\xi) = \frac{k \operatorname{Sin}\frac{\pi}{h} \operatorname{Cof}\frac{\pi \xi}{h}}{\pi \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi \xi}{h}}} + \frac{2}{h \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi \xi}{h}}} \int_{-1}^{+1} \frac{w(x) \sqrt{\operatorname{Sin}^2\frac{\pi}{h} - \operatorname{Sin}^2\frac{\pi x}{h}}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{h}(x-\xi)} dx .$$

Die Konstante k wird dabei durch die Abflußbedingung

$$\Gamma'(+1) = 0$$

festgelegt. Der Abwind w ist zu beziehen auf eine Gerade, die senkrecht steht zu der Winkelhalbierenden des Winkels, der aus der Strömungsrichtung weit vor und der weit hinter dem Gitter gebildet wird. Diese Vorschrift rührt von der Tatsache her, daß ein regelmäßiges lineares Wirbelgitter sowohl im Unendlichen vor als auch im Unendlichen hinter dem Gitter eine endliche Richtungsänderung der Strömung hervorruft und zwar sind diese Richtungsänderungen weit vor und weit hinter dem Gitter entgegengesetzt gleich.

(Eingegangen am 12. Juli 1950.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Johannes Dörr*, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für praktische Mathematik.

Über eine Anwendung der Matrizenrechnung auf die Theorie der Fachwerke.

Von Th. Pöschl.

1. Gegeben sei ein statisch-bestimmtes Fachwerk mit n Gelenken oder Knoten K_i und $s = 2n - 3$ Stäben. Die Koordinaten der Gelenkpunkte in irgendeinem Cartesischen Achsensystem seien (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$, die Stablängen $l_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$. Die in den Gelenken wirkenden Kräfte seien, da ihre Richtungen beliebig sein können, durch ihre Komponenten (X_i, Y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ und die Stabkräfte in den Stäben (i, k) durch S_{ik} bezeichnet. Dann sind diese Stabkräfte bekanntlich durch die $2n$ Gleichungen

$$X_i = \sum_k S_{ik} \frac{x_i - x_k}{l_{ik}}, \qquad Y_i = \sum_k S_{ik} \frac{y_i - y_k}{l_{ik}} \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

bestimmt, wobei die Summen über die Gelenkpunkte (x_k, y_k) zu erstrecken sind, mit denen das Gelenk (x_i, y_i) durch die Stäbe verbunden ist. Da die in den Gelenken wirkenden Kräfte den drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - y_i X_i) = 0 \tag{2}$$

zu genügen haben, so sind von den $2n$ Gleichungen (1) nur $2n-3$ voneinander unabhängig. Die Stabkräfte S_{ik} sind dann durch Auflösung dieser Gleichungen bestimmt; wir nehmen an, daß diese Auflösung eindeutig möglich, das Fachwerk also statisch-bestimmt sei.

Wir stellen uns die Aufgabe, die Verschiebungen (u_i, v_i) der Gelenkpunkte K_i in den Kraftrichtungen zu bestimmen, eine Aufgabe, die durch Anwendung der Matrizenrechnung in besonders einfacher und übersichtlicher Weise gelöst werden kann.

Da die Gleichungen (1) linear sind, so sind auch ihre Lösungen S_{ik} als lineare Funktionen der X_i und Y_i darstellbar. Der Einfachheit halber denken wir uns weiterhin die s-Stäbe mit $1, 2, \ldots s$, die Stabkräfte mit $(S_1, S_2, \ldots S_s)$ und die n Gelenke mit $1, 2, \ldots n$ beziffert; ferner betrachten wir $S_1, S_2, \ldots S_s$ als die s Elemente einer einreihigen Spaltenmatrix in einem R_s und die X_i und Y_i je als n Elemente in einem darin eingebetteten R_n, und schreiben — was sich für die folgenden Ausführungen als zweckmäßig erweisen wird — die Auflösung der Gleichungen (1) in der Matrizenform[1]

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{X} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{Y}. \tag{3}$$

Ausführlicher geschrieben haben also $\mathfrak{S}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ die Form

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdots \\ S_s \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{pmatrix},$$

während $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ rechteckige Matrizen mit s-Zeilen und n-Spalten bedeuten:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}, b_{s2}, \ldots b_{sn} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_{11}, c_{12}, \ldots c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \ldots c_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{s1}, c_{s2}, \ldots c_{sn} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung (3) lautet also in ausführlicherer Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \cdots \\ S_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}, \ldots b_{1n} \\ \cdots\cdots \\ b_{s1}, \ldots b_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11}, \ldots c_{1n} \\ \cdots\cdots \\ c_{s1}, \ldots c_{sn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Es ist klar, daß diese Darstellungsart — in entsprechender Ausgestaltung — auch für statisch-unbestimmte Fachwerke, und auch für Raumfachwerke möglich ist, sowie auch für alle anderen Tragwerke, deren Theorie durch lineare Beziehungen beherrscht wird.

2. Für die folgenden Anwendungen ist es von Bedeutung, daß die Größen b_{ik} und c_{ik} nicht durch Auflösung der Gleichungen (1) bestimmt werden müssen, sondern auf direkte Weise durch

[1] Im folgenden werden im wesentlichen die Bezeichnungen nach *R. Zurmühl*, Matrizen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950, verwendet. Man vergleiche auch die dort aufgeführten Schriften über diesen Gegenstand.

die elementaren Methoden der Fachwerkstatik erhalten werden können; und zwar kann dies sowohl durch Rechnung (mittels *Ritter*scher Schnitte), als auch durch Zeichnung (mittels der Methode der Kräftepläne) unter Aufbringung geeigneter Belastungen geschehen. Es ist hierbei zu beachten, daß für wirkliche Bestimmung der Verschiebungen die Größen b_{ik} und c_{ik} einzeln gebraucht werden.

Man denke sich hierzu zunächst nur einen Knoten — etwa K_i — mit einer Last $X_i = 1$ belastet, während alle anderen Knoten unbelastet und alle $Y_i =$ null sind. Die in den Stäben wirkenden Kräfte ergeben dann unmittelbar die Größen

$$b_{1i}, \quad b_{2i} \ldots . b_{si} .$$

Ebenso werden durch Belastung des Knotens K_i mit der Last $Y_i = 1$, während alle übrigen Y und alle X_i Null sind, die Größen

$$c_{1i}, \quad c_{2i} \ldots . \quad c_{si}$$

bestimmt.

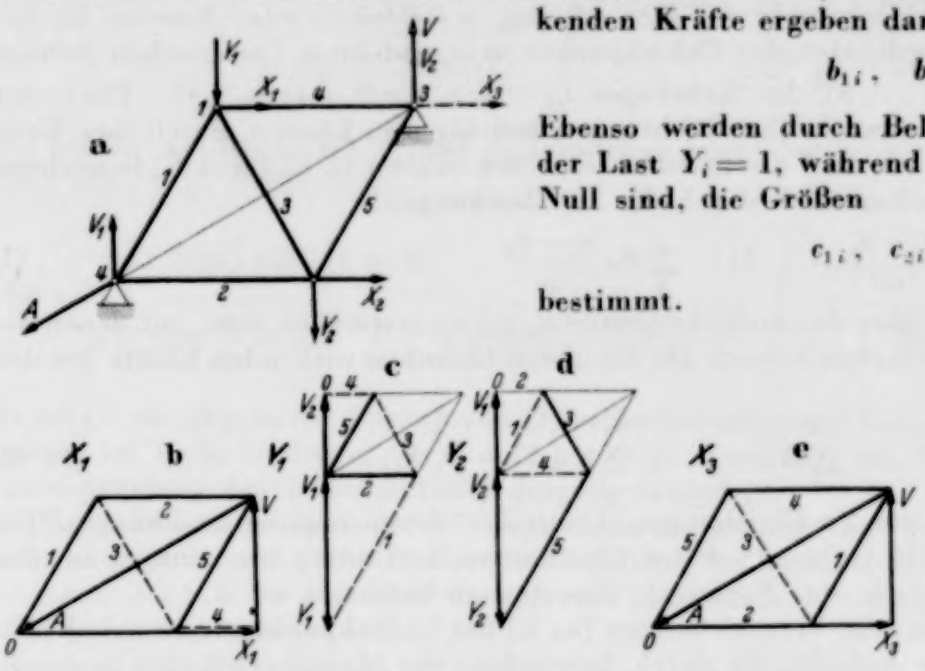


Abb. 1. Beispiel: Einfaches Fachwerk. Ermittlung der Einflußmatrix durch Kräftepläne.

Durch 2 n-malige Anwendung dieses Vorganges sind die beiden Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ vollständig bestimmt. Die Größen b_{ik} und c_{ik} werden als Einflußzahlen (s. *Zurmühl*, S. 33), und die Matrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ als (innere) Einflußmatrizen bezeichnet.

3. Wir erläutern diesen Vorgang an dem folgenden einfachen Beispiel: Gegeben sei ein Dreiecksfachwerk nach Abb. 1a mit $n = 4$ Gelenken und $s = 5$ Stäben, das durch zwei Kräfte $P_1, (X_1, Y_1)$ und $P_2 (X_2, Y_2)$ belastet ist. Man bestimme die Stabkräfte nach der angegebenen Methode.

Zur Ermittlung der Einflußzahlen b_{ik} und c_{ik} benötigt man vier Kräftepläne, für welche die Belastungen der Reihe nach durch $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $Y_1 = 1$, $Y_2 = 1$ gegeben sind, während alle anderen Lastkomponenten jeweils gleich Null sind. Die Kräftepläne sind in Abb. 1b bis d gezeichnet (für $X_2 = 1$ reduziert sich die Einflußmatrix auf $b_{22} = 1$). Als „Einheit" wird eine beliebige Länge gewählt, in der dann alle anderen Komponenten gemessen werden. Man erhält

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0{,}66, & 0 \\ 0{,}66, & 1 \\ -0{,}66, & 0 \\ -0{,}35, & 0 \\ +0{,}66, & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} -0{,}76, & -0{,}38 \\ +0{,}38, & +0{,}19 \\ -0{,}38, & +0{,}38 \\ -0{,}19, & -0{,}38 \\ +0{,}38, & -0{,}76 \end{pmatrix},$$

und die Stabkräfte sind gegeben durch

$$\left| \begin{array}{ll} S_1 = 0{,}66\, X_1 + * & -0{,}76\, Y_1 - 0{,}38\, Y_2 , \\ S_2 = 0{,}66\, X_1 + X_2 & +0{,}38\, Y_1 + 0{,}19\, Y_2 , \\ S_3 = -0{,}66\, X_1 + * & -0{,}38\, Y_1 + 0{,}38\, Y_2 , \\ S_4 = -0{,}33\, X_1 + * & -0{,}19\, Y_1 - 0{,}38\, Y_2 , \\ S_5 = 0{,}66\, X_1 + * & +0{,}38\, Y_1 - 0{,}76\, Y_2 . \end{array} \right| \tag{5}$$

4. Sobald die Einflußmatrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmt sind, kann die Ermittlung der Verschiebungen der einzelnen Knotenpunkte des statisch-bestimmten Fachwerks mittels des *Castiglianos*chen Satzes über die Abgeleiteten der Formänderungsarbeit **A** erfolgen. Wir bestimmen zunächst die Verschiebungen der mit den eingeprägten Kräften P_i belasteten Knoten.

Hierzu hat man die Ableitungen von **A** nach den einzelnen Lastkomponenten X_i, Y_i, zu bilden, die unmittelbar die Verschiebungen in Richtung der betreffenden Lasten ergeben. Dazu ist erforderlich, daß die Formänderungsarbeit **A** durch diese Lasten ausgedrückt wird. Dies ge-

schieht durch die Formel

$$\mathbf{A}(S_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} S_j^2\, r_j\,. \tag{6}$$

wobei in bekannter Weise die abkürzenden Bezeichnungen $r_j = l_j/E_jF_j$ eingeführt sind, in denen jetzt l_j die Stablängen, F_j die Querschnitte und E_j die Elastizitätsmoduli der einzelnen Stäbe bedeuten.

Man hat nur die S_j vermöge der Gleichungen (4), die wir hierzu in der Form schreiben

$$S_j = \sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\,X_k + c_{jk}\,Y_k) \qquad (j = 1, 2, \ldots s)\,, \tag{4'}$$

in die Gleichung (6) einzuführen und erhält die Formänderungsarbeit $\mathbf{A}$, in den Belastungen (X, Y) ausgedrückt,

$$\mathbf{A}(X, Y) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\,X_k + c_{jk}\,Y_k)^2\, r_j\,. \tag{6'}$$

Für die Bildung der Abgeleiteten von $\mathbf{A}$ nach den X_i und Y_i brauchen wir die Größen

$$\frac{\partial S_j}{\partial X_i} = b_{ji}\,, \quad \frac{\partial S_j}{\partial Y_i} = c_{ji}\,, \tag{7}$$

aus denen ebenfalls die Bedeutung der Matrizenelemente b_{ji} und c_{ji} hervorgeht.

Die Komponenten der Verschiebungen (u_i, v_i) der Knotenpunkte K_i nach den Achsen (x, y) erhält man sodann nach dem Satz von *Castigliano* in der Form

$$\begin{aligned}
u_i &= \frac{\partial A}{\partial X_i} = \sum_{j=1}^{s} S_j\frac{\partial S_j}{\partial X_i}\,r_j = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\,X_k + c_{jk}\,Y_k)\,b_{ji}\,r_j \\
&= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\,b_{ji}\,r_j\,X_k + c_{jk}\,b_{ji}\,r_j\,Y_k) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik}\,X_k + \beta_{ik}\,Y_k), \\
v_i &= \frac{\partial A}{\partial Y_i} = \sum_{j=1}^{s} S_j\frac{\partial S_j}{\partial Y_i}\,r_j = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\,X_k + c_{jk}\,Y_k)\,c_{ji}\,r_j \\
&= \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\,c_{ji}\,r_j\,X_k + c_{jk}\,c_{ji}\,r_j\,Y_k) = \sum_{k=1}^{n}(\gamma_{ik}\,X_k + \delta_{ik}\,Y_k)\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{aligned}
\alpha_{ik} &= \sum_{j=1}^{s} b_{jk}\,b_{ji}\,r_j\,, \quad \beta_{ik} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk}\,b_{ji}\,r_j\,. \\
\gamma_{ik} &= \sum_{j=1}^{s} b_{jk}\,c_{ji}\,r_j\,, \quad \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk}\,c_{ji}\,r_j\,.
\end{aligned} \qquad \begin{array}{l} (i = 1, 2, \ldots n) \\ (k = 1, 2, \ldots n)\,. \end{array} \tag{9}$$

Bezeichnet man noch mit $\mathfrak{R}$ die einreihige Spaltenmatrix mit den Elementen r_i, und mit $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ die einreihigen Spaltenmatrizen mit den Elementen u_i, v_i, also

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \ldots \\ r_s \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \ldots \\ v_n \end{pmatrix},$$

so lassen sich die Gleichungen (8) in der einfachen Form schreiben

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U} &= \mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{Y}\,, \\
\mathfrak{V} &= \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}'\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{X} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'\,\mathfrak{R}\,\mathfrak{Y}\,,
\end{aligned} \tag{10}$$

wobei $\mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ die transponierten Matrizen zu $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und die jeweils aus den drei ersten Teilen bestehenden Matrizen die äußeren Einflußmatrizen oder Verschiebungsmatrizen bedeuten:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}^* &= \|\alpha_{ik}\| = \mathfrak{B}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{R}\,, & \mathfrak{B}^* &= \|\beta_{ik}\| = \mathfrak{C}\,\mathfrak{B}'\,\mathfrak{R}\,, \\
\Gamma^* &= \|\gamma_{ik}\| = \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}'\,\mathfrak{R}\,, & \Delta^* &= \|\delta_{ik}\| = \mathfrak{C}\,\mathfrak{C}'\,\mathfrak{R}\,.
\end{aligned} \tag{11}$$

Die Elemente dieser Matrizen sind die Koeffizienten der einzelnen Glieder in dem Ausdruck für die Formänderungsarbeit $\mathbf{A}$, wenn diese durch die Lasten (X_i, Y_i) ausgedrückt wird.

Man erkennt ferner, daß wegen des *Maxwell*schen Satzes von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen die Größen α bis δ gewisse Symmetrieeigenschaften erfüllen müssen; und zwar lauten diese Beziehungen für den vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} &\alpha_{ik} = \alpha_{ki}\,, \qquad \delta_{ik} = \delta_{ki} \qquad \text{für } k \neq i\,, \\ &\beta_{ik} = \gamma_{ki}\,, \qquad \beta_{ki} = \gamma_{ik} \qquad \text{für } k \neq i \text{ und } k = i\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Der vollständige Ausdruck für die Formänderungsarbeit $\mathbf{A}$, in den Lasten (X_i, Y_i) ausgedrückt, lautet daher

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i u_i + Y_i v_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{ik} X_i X_k + 2\,\beta_{ik} X_i Y_k + \delta_{ik} Y_i Y_k)\,.$$

In dem oben behandelten Beispiel ergeben sich für die äußeren Einflußzahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die folgenden (abgerundeten) Werte:

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \alpha_{21} = 0{,}66\, r_2\,, \\ \delta_{12} &= \delta_{21} = 0{,}29\, r_1 + 4{,}07\, r_2 - 0{,}14\, r_3 + 0{,}07\, r_4 - 0{,}29\, r_5\,, \\ \beta_{12} &= \gamma_{21} = 0{,}25\, r_1 + 0{,}125\, r_2 - 0{,}25\, r_3 + 0{,}13\, r_4 - 0{,}5\, r_5\,, \\ \beta_{21} &= \gamma_{12} = 0{,}38\, r_2\,, \\ \beta_{11} &= \gamma_{11} = -0{,}5\, r_1 + 0{,}25\, r_2 + 0{,}25\, r_3 + 0{,}06\, r_4 + 0{,}25\, r_5\,, \\ \beta_{22} &= \gamma_{22} = 0{,}19\, r_2\,. \end{aligned}$$

während die übrigen Elemente die Werte haben

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= 0{,}435\,(r_1 + r_2 + r_3 + r_5) + 0{,}125\, r_4\,, \qquad \alpha_{22} = r_2\,, \\ \delta_{11} &= 0{,}58\, r_1 + 0{,}144\,(r_2 + r_3 + r_5) + 0{,}036\, r_4\,, \\ \delta_{22} &= 0{,}144\,(r_1 + r_3 + r_4) + 0{,}036\, r_2 + 0{,}585\, r_5\,. \end{aligned}$$

5. Die Bestimmung der Durchsenkung eines verschieblichen Auflagers (wie z. B. des waagrecht verschieblichen Knotens 3 im obigen Beispiel Abb. 1a) erfolgt dadurch, daß im Knoten 3 eine fiktive Kraft X_3 vom Betrage 1 in Richtung der möglichen Verschiebung angebracht wird, die dann geradeso behandelt wird, wie die übrigen Lasten. Es wird die Matrix $\mathfrak{X}$ um ein Element X_3 erweitert und die zugehörige Spalte der Einflußmatrix mittels eines neuen Kräfteplanes bestimmt. Nach Bildung der partiellen Ableitung $\partial\mathbf{A}/\partial X_3$ wird dann $X_3 = 0$ gesetzt, um die gesuchte Verschiebung u_3 zu erhalten. Auflager in festen Gelenken brauchen nicht berücksichtigt zu werden.

Die Glieder in den Gleichungen (8), die die waagrechte Verschiebung u_3 im verschieblichen Auflager 3 ergeben, sind dann von folgender Form:

$$u_3 = \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n}(b_{jk}\, b_{j3}\, r_j\, X_k + c_{jk}\, b_{j3}\, r_j\, Y_k) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha_{3k}\, X_k + \beta_{3k}\, Y_k)\,. \tag{13}$$

wobei ähnlich wie oben gesetzt ist

$$\alpha_{3k} = \sum_{j=1}^{s} b_{jk}\, b_{j3}\, r_j\,, \qquad \beta_{3k} = \sum_{j=1}^{s} c_{jk}\, b_{j3}\, r_j\,. \tag{14}$$

Für das oben behandelte Beispiel ergeben sich daher für diese Einflußzahlen α_{3k} und β_{3k} die folgenden Werte.

Zunächst ergibt der Kräfteplan für die Kraft X_3, der in Abb. 1e) gezeichnet ist, für die Einflußmatrix $\mathfrak{B}$ eine dritte Spalte mit den folgenden Werten:

$$b_{13} = 0{,}66, \quad b_{23} = 0{,}66, \quad b_{33} = -0{,}66, \quad b_{43} = 0{,}66, \quad b_{53} = 0{,}66,$$

und damit folgen die zusätzlichen Glieder der Einflußmatrix:

$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= 0{,}435\,(r_1 + r_2 + r_3 + r_5) - 0{,}25\, r_4\,, \\ \alpha_{32} &= 0{,}66\, r_2\,, \\ \beta_{31} &= -0{,}5\, r_1 + 0{,}25\, r_2 + 0{,}25\, r_3 - 0{,}125\, r_4 + 0{,}25\, r_5\,, \\ \beta_{32} &= -0{,}5\, r_1 + 0{,}125\, r_2 - 0{,}25\, r_3 - 0{,}25\, r_4 - 0{,}5\, r_5\,. \end{aligned}$$

Für die Verschiebungen der vier Knotenpunkte 1, 2, 3, 4 des gegebenen Fachwerks erhält man sodann die folgenden Werte:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \beta_{11} Y_1 + \beta_{12} Y\,, \\
v_1 &= \gamma_{11} X_1 + \gamma_{12} X_2 + \delta_{11} Y_1 + \delta_{12} Y_2\,, \\
u_2 &= \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \beta_{21} Y_1 + \beta_{22} Y_2\,, \\
v_2 &= \gamma_{21} X_1 + \gamma_{22} X_2 + \delta_{21} Y_1 + \delta_{22} Y_2\,, \\
u_3 &= \alpha_{31} X_1 + \alpha_{32} X_2 + \beta_{31} Y_1 + \beta_{32} Y_2\,, \quad v_3 = 0\,, \\
u_4 &= v_4 = 0\,.
\end{aligned}
$$

6. Als zweites Beispiel für die Anwendung des Verfahrens sei ein nicht-einfaches, statisch bestimmtes Fachwerk gewählt, d. i. ein solches, das sich nicht aus Dreiecken zusammensetzt, das also nicht aus Zweischlägen auf- und abbaubar ist. Es hat jedoch die Eigenschaft bewahrt, daß sich die Stabkräfte durch Rechnung oder Zeichnung als lineare Funktionen der an den Knoten angreifenden Lasten darstellen lassen. Das Fachwerk besteht nach Abb. 2a aus $n = 6$ Knoten und $s = 2n - 3 = 9$ Stäben und ist in geometrischer und mechanischer Hinsicht in bezug auf die Lotrechte symmetrisch. Die Belastung besteht aus den zwei gleichen Kräften X_1, X_1' an den beiden Knoten 1, 1′, aus der lotrechten Last Y_3 am Knoten 3 und — soferne auch die waagerechte Verschiebung der Auflagerpunkte 2, 2′ ermittelt werden soll, — aus den beiden fiktiven Kräften X_2, X_2' an diesen Punk-

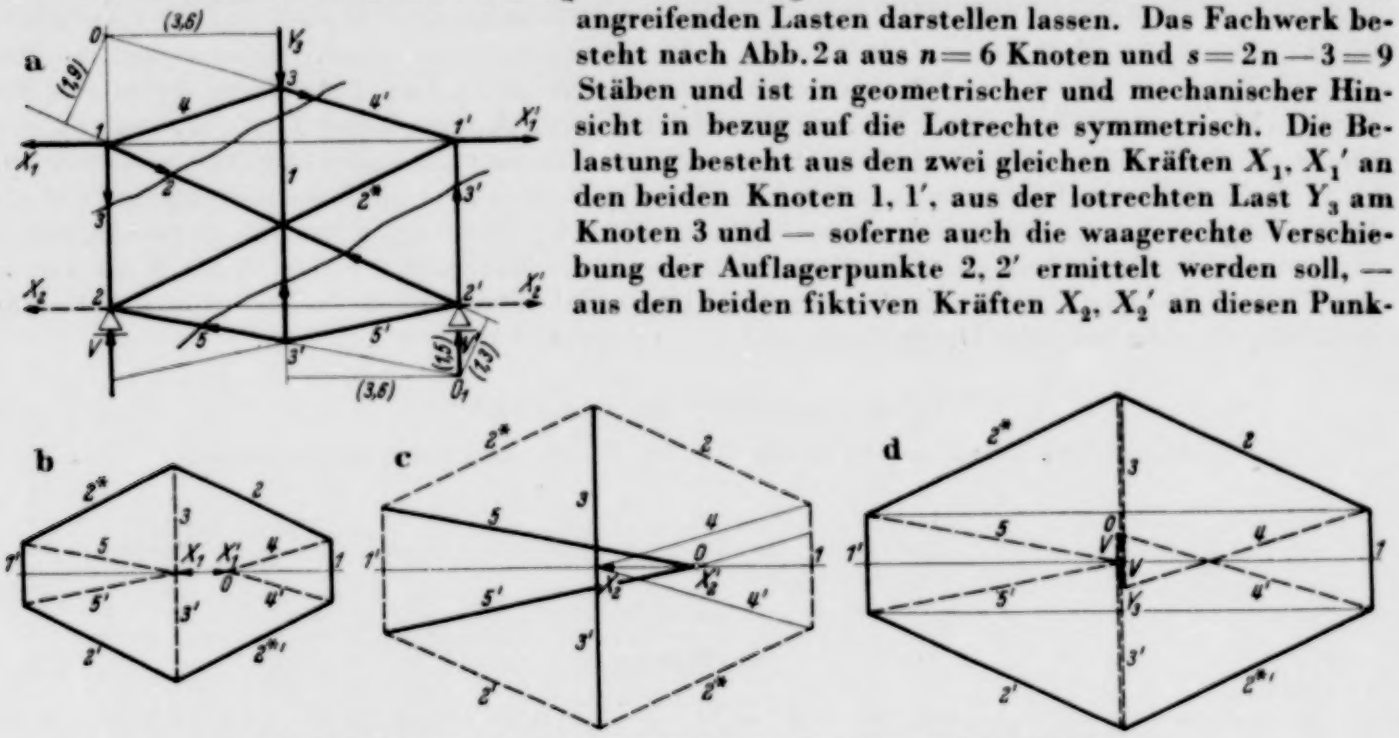


Abb. 2. Nichteinfaches Fachwerk. Ermittlung der Einflußmatrix durch Kräftepläne.

ten 2, 2′. Die Matrix $\mathfrak{R}$ der elastischen Konstanten sei gleichfalls symmetrisch, für ihre Elemente $r_i = l_i / E_i F_i$ und die Größen der Lasten mögen keine besonderen Annahmen gemacht werden, so daß sie als Parameter in den Gleichungen stehen bleiben.

Zur Bestimmung der inneren Einflußmatrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ für die Lasten X_1, X_2 und Y_3 brauchen wir je einen Kräfteplan, die in bekannter Weise (durch je zwei *Ritter*sche Schnitte) erhalten werden können und aus denen die Elemente der Einflußmatrizen unmittelbar abgelesen werden können. Die Kräftepläne sind in Abb. 2b), c), *d*) dargestellt. Für die Kräfte X_1, X_2, Y_3 erhält man die folgenden Einflußzahlen:

X_1: $b_{11} = 1{,}32$, $b_{21} = 3{,}67$, $b_{31} = -2{,}25$, $b_{41} = -2{,}45$, $b_{51} = -3{,}4$,
X_2: $b_{12} = -1{,}32$, $b_{22} = -2{,}5$, $b_{32} = 1{,}7$, $b_{42} = 2{,}3$, $b_{52} = 3{,}3$,
Y_3: $c_{13} = 2{,}17$, $c_{23} = 6$, $c_{33} = -4{,}2$, $c_{43} = -5{,}7$, $c_{53} = -5{,}5$,

während alle anderen b_{ik} und c_{ik} Null sind.

Aus diesen Größen erhält man sodann die Elemente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der äußeren Einflußmatrizen oder der Verschiebungsmatrizen in rein schematischer Weise nach den Gleichungen 9; von diesen sind in dem gewählten Beispiel nur die Größen

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \beta_{13},\ \beta_{23},\ \gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \gamma_{31},\ \gamma_{32},\ \delta_{13},\ \delta_{33}$$

von Null verschieden. Die gesuchten Verschiebungen folgen dann durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{11} X_1 + \beta_{13} Y_3 = u_1'\,, \\
v_1 &= \gamma_{11} X_1 + \delta_{13} Y_3 = v_1'\,,
\end{aligned}
$$

$$u_2 = \alpha_{21} X_1 + \beta_{23} Y_3 = u_2' .$$
$$v_2 = \gamma_{21} (X_1 - X_1') + \gamma_{22} (X_2 - X_2') + \delta_{23} Y_3 = 0 \quad (\text{da } \delta_{23} = 0),$$
$$u_3 = \alpha_{31} (X_1 - X_1') + \alpha_{32} (X_2 - X_2') + \beta_{33} Y_3 = 0 \quad (\text{da } \beta_{33} = 0),$$
$$v_3 = \gamma_{31} X_1 \qquad + \delta_{33} Y_3 .$$

7. Was die Anwendung dieser Darstellung auf statisch-unbestimmte Stabwerke betrifft, so erfolgt diese in derselben Weise wie für statisch-bestimmte Fälle. Voraussetzung hierfür ist, daß die Ermittlung der Stabkräfte durch eine der üblichen Methoden erfolgt ist, und daß die Stabkräfte ähnlich wie durch Gleichung (3) als lineare Funktionen der in den Knoten angreifenden Kräfte gefunden sind; da diese Kräfte in der Ebene beliebige Richtungen haben können, so müssen ihre Komponenten (X_i, Y_i) nach zwei Achsen eingeführt werden, so daß für die Stabkräfte dieselbe Darstellung gilt wie für statisch-bestimmte Stabwerke in der Form

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{X} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{Y}, \qquad (3')$$

wobei die Einflußmatrizen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nunmehr als bekannt angesehen werden. Für die Verschiebungsmatrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ gelten dieselben Formeln (10) und (8) wie zuvor. Wenn es sich um die Verschiebung eines Knotens in Richtung einer dort angreifenden Last handelt, so ergibt sich die Verschiebung unmittelbar durch Bildung der Ableitung von **A** nach dieser Last, in allen anderen Fällen durch Einführung einer Hilfskraft, die nach Ausführung der Ableitung Null gesetzt wird.

8. Schlußbemerkung. In dieser Arbeit wird eine Anwendung der Matrizenrechnung auf die Ermittlung der Verschiebungen der Knotenpunkte eines Fachwerks gegeben, die in geschlossener Form durch die Einflußmatrizen des Fachwerks, durch die Matrix $\mathfrak{R}$ der elastischen Konstanten, sowie durch die Lastmatrizen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ausgedrückt werden. Das Verfahren ist auf alle Fälle anwendbar, die eine ähnliche Darstellung mittels linearer Funktionen zulassen.

(Eingegangen am 7. September 1950.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. *Th. Pöschl*, Karlsruhe, Wendtstraße 5.

Nachtrag

zu meinem Aufsatz in Bd. VIII, S. 106 des Ingenieur-Archivs „Zur Ermittlung der Einflußflächen und inneren Kräfte umfangsgelagerter Rechteckplatten".

Von **W. Koepcke.**

Bezugnehmend auf die Fußnote auf S. 132 in meinem obigen Aufsatz teilte mir Herr Prof. Dr.-Ing. habil. *G. Worch* mit, daß er das darin beschriebene Verfahren zur Berechnung rechteckiger Platten bereits erstmalig 1939 in seinen Vorlesungen gebracht hat, es aber wegen dringenderer Arbeiten erst 1943 in der August-Hertwig-Festschrift (Heft 6 der Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues) unter dem Titel „Beitrag zur Berechnung der allseitig eingespannten Rechteckplatte" veröffentlichen konnte. Somit beruht der Inhalt des Aufsatzes von Herrn Prof. Dr.-Ing. *Worch* auf eigenen Arbeiten und fußt nicht auf meiner Arbeit aus dem Jahre 1940.

(Eingegangen am 25. September 1950.)

Privatdozent Dr.-Ing. *Werner Koepcke*, Berlin-Charlottenburg, Hardenbergstr. 35.

LANDOLT-BÖRNSTEIN

Zahlenwerte und Funktionen
aus Physik · Chemie · Astronomie · Geophysik und Technik

Sechste Auflage der „Physikalisch-Chemischen Tabellen"

In Gemeinschaft mit **J. Bartels, P. ten Bruggencate, K. H. Hellwege, Kl. Schäfer, E. Schmidt**
und unter vorbereitender Mitwirkung von **J. D'Ans, G. Joos, W. A. Roth †**

herausgegeben von

Arnold Eucken †

In vier Bänden (Erster Band in fünf Teilen)

I. Band: Atom- und Molekularphysik

Im März **1951** *wird erscheinen:*

2. Teil: **Molekeln I.** (Kerngerüst)

Bearbeitet von
P. Debye jr., E. U. Franck, F. Kerkhof, W. Maier, R. Mecke, H. Pajenkamp, H. Seidel, H. Stuart, E. Wicke
Vorbereitet von Georg Joos

Herausgegeben von
A. Eucken † und **K. H. Hellwege**

Mit zahlreichen Abbildungen. Etwa 580 Seiten. 1951
In Moleskin gebunden DMark 168.—

Inhaltsübersicht:

Kerngerüst (geometrische und dynamische Eigenschaften:) Atomabstände und Strukturen. — Valenz-Energien chemischer Bindungen. — Trennungs-Energien chemischer Bindungen: Dissoziations-Energien zweiatomiger Molekeln. Trennungs-Energien mehratomiger Molekeln. — Schwingungen und Rotationen der Molekeln. Übersicht und Gebrauchsanweisung. Substanzverzeichnis. Literaturverzeichnis. Symmetrie der Molekeln und Eigenschwingungen. Eigenschwingungen (auch Trägheitsmomente und Kernabstände) einfacher Molekeln aus Raman- und Ultrarotspektren. Ultrarotspektren der einfachsten Molekeln. Ultrarotspektren weiterer ausgewählter Molekeln. Ramanspektren weiterer ausgewählter Molekeln. Mikrowellenspektren. — Die Hemmung der inneren Rotation einiger Molekeln im Gaszustand.

Kein Physiker, Chemiker oder Ingenieur kommt gegenwärtig ohne ein Nachschlagewerk aus, in dem die exakt durch Zahlenwerte angebbaren Ergebnisse der bisherigen Forschung übersichtlich zusammengestellt sind. Nur wenige von ihnen können sich mit den relativ kurzen Tabellenwerken begnügen, die eine gedrängte Auswahl aus dem Gesamtmaterial bringen. Die meisten Forscher und Praktiker sind auf ein ausführliches Werk angewiesen, das im Prinzip das gesamte in der Weltliteratur veröffentlichte Zahlenmaterial berücksichtigt, und in dem man auch die Zitate der Originalarbeiten findet, so daß man sich über den Ursprung eines jeden Zahlenwertes unterrichten und seine Zuverlässigkeit von Fall zu Fall kritisch nachprüfen kann.

Die ursprünglich von H. Landolt und R. Börnstein herausgegebenen Physikalisch-Chemischen Tabellen sind das erste Werk, das diese Forderung erfüllte.

Die jetzt erscheinende 6. Auflage bedurfte im Hinblick auf die anschwellende Originalliteratur und mit Rücksicht auf die stetig steigenden Anforderungen, die an ein derartiges Werk gestellt werden, einer durchgreifenden Neugestaltung, was u. a. auch unmittelbar durch die Titeländerung zum Ausdruck kommt. Neu geschaffen wurde beispielsweise ein besonderer Band, der die wichtigsten astronomischen und geophysikalischen Zahlenwerte und Funktionen enthält, sowie ein solcher, der speziell den Bedürfnissen der praktisch tätigen Physiker, Chemiker und Ingenieure gerecht wird.

Bisher erschien:

I. Band, 1. Teil: **Atome und Ionen.** Mit 248 Abbildungen. XII, 441 Seiten. 1950. In Moleskin gebunden DMark 126.—

Die weiteren Bände werden folgende Gebiete behandeln:

I. Band, 3. Teil: **Molekeln II:** (Elektronenhülle). Etwa 500 Seiten. Erscheint etwa im Sommer 1951.
4. Teil: **Kristalle.** Etwa 320 Seiten. Erscheint etwa 1951.
5. Teil: **Atomkerne.** Etwa 400 Seiten. Erscheint etwa 1951.

II. Band: **Makrophysik und Chemie.** In Vorbereitung.

III. Band: **Astronomie und Geophysik.** Etwa 400 Seiten. Erscheint etwa 1951.

IV. Band: **Technik.** In etwa 3 Teilen. Erster Teil erscheint etwa Ende 1951.

Jeder Band und Bandteil ist einzeln käuflich

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Der Kreisel

Seine Theorie und seine Anwendungen

Von

Dr. R. Grammel

o. Professor an der Technischen Hochschule Stuttgart

Zweite, neubearbeitete Auflage

Erster Band:

Die Theorie des Kreisels

Mit 137 Abbildungen. XI, 281 Seiten. 1950. DMark 30.—; Ganzleinen DMark 33.—

Inhaltsübersicht:

Einleitung. — **Grundlagen:** Grundlagen der Vektorrechnung. — Grundlagen der Mechanik. — Der Trägheitstensor. — **Der symmetrische Kreisel:** Der kräftefreie symmetrische Kreisel. — Die geführte Bewegung des symmetrischen Kreisels. — Der symmetrische Kreisel unter Zwang und Stoß. — Der schwere symmetrische Kreisel. — Der Einfluß der Reibung. — **Der unsymmetrische Kreisel:** Der kräftefreie unsymmetrische Kreisel. — Der schwere unsymmetrische Kreisel. — **Besondere Probleme:** Kreisel im erweiterten Sinne. — Gyroskopische Systeme. — Anhang: **Darstellung der Kreiselbewegungen durch Thetafunktionen.** — Namen- und Sachverzeichnis.

Zweiter Band:

Die Anwendungen des Kreisels

Mit 133 Abbildungen. VI, 268 Seiten. 1950.
DMark 30.—; Ganzleinen DMark 33.—

Inhaltsübersicht:

Kreiselwirkungen bei Radsätzen: Kollermühlen. — Kritische Drehzahlen von Rotoren. — Fahrzeuge. — Flugzeuge. — **Kreiselgeräte:** Geräte mit Kompaßkreiseln. — Der Kreiselkompaß. — Künstliche Horizonte mit Pendelkreisen. — Wende- und Lagekreisel. — Sonstige Kreiselgeräte. — **Unmittelbare Stabilisatoren:** Richtkreisel. — Stützkreisel. — Dämpfkreisel. — Namen- und Sachverzeichnis.

Praktische Funktionenlehre

Von

Professor Dr.-Ing. Friedrich Tölke

Erster Band:

Elementare und elementare transzendente Funktionen

Zweite, stark erweiterte Auflage

Mit 178 Abbildungen, 50 durchgerechneten Beispielen und einer Ausschlagtafel.
XI, 440 Seiten. 1950. Ganzleinen DMark 39.—

Inhaltsübersicht:

I. Abschnitt: Definierende Differential- und Integralgleichungen, Fundamentaleigenschaften und gegenseitige Beziehungen der elementaren und elementaren transzendenten Funktionen. — II. Abschnitt: Durch elementare und elementare transzendente Funktionen ausdrückbare Integrale. — III. Abschnitt: Funktionentafeln der elementaren Transzendenten. — IV. Abschnitt: Anwendungen im Bereich der partiellen Differential- und Integralgleichungen. — V. Abschnitt: Summierung von Reihenentwicklungen. — VI. Abschnitt: Tafel der zonalen Kugelfunktion sowie ihrer Abteilungen und Integrale.

Auf zahlreichen Gebieten der Technik zeigt sich ein immer fühlbarer werdendes Bedürfnis nach einer breit angelegten Darstellung der Praktischen Funktionenlehre. Bei der Inangriffnahme neuer Probleme ist man heute gezwungen, sich mit der Lösung von Integralen, Differential- und Integralgleichungen zu befassen, die längst technisches Allgemeingut sein könnten. Um diese Verhältnisse zu bessern, hat sich der Verfasser entschlossen, ein den heutigen technischen Bedürfnissen angepaßtes mehrbändiges Lehr- und Nachschlagebuch der Praktischen Funktionenlehre zu schaffen. Die vorliegende, zweite Auflage des I. Bandes bringt eine Erweiterung um rund 180 Seiten. Über den in der ersten Auflage behandelten Stoff hinaus enthält sie völlig neu die Abschnitte IV, V und VI (siehe oben Inhaltsübersicht) und wird daher auch viele Benutzer der ersten Auflage interessieren.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany. L/V/12/7 0,8 K.B./Z.040.